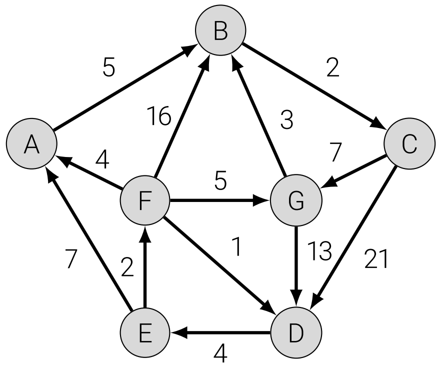
Algorithme de Dijkstra

Question 1

Exécuter l'algorithme de Dijkstra sur le graphe $\mathbb{G}_1$ à partir du sommet C. On pourra réprésenter les différentes étapes de l'algorithme avec un tableau montrant l'évolution de la distance estimée pour chaque nœud.



Graphe $\mathbb{G}_1$

Proposition de solution

On construit un tableau ayant pour colonnes chacun des sommets du graphe. On ajoute à gauche une colonne qui recensera les sommets choisis à chaque étape.

	A	B	C	D	E	F	G
Départ	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{0_C}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

On part du nœud C. À partir de C, on voit sur le graphe que l'on peut rejoindre G et D avec les poids respectif 7 et 21. On inscrit donc 7_C et 21_C dans les colonne de G et D. (Le C en indice nous indique la provenance, il nous servira ultérieurement pour retracer les chemins les plus courts.)

	A	B	C	D	E	F	G
Départ	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{0_C}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
C(0)	$+\infty$	$+\infty$		21_C	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{7_C}$

On sélectionne le plus petit résultat de la dernière ligne. Ici 7_C. On peut oublier les cases en-dessous de 7_C, on vient de trouver le chemin le plus court menant jusqu'à G en partant de C.

A partir de G, on peut rejoindre B ou D, avec les poids respectif 3 et 13.

- Si on rejoint B : le coût total du chemin sera de $7 + 3 = 10$. $10 < +\infty$ ce trajet pour aller jusqu'à B est plus rapide que le précédent, on note donc 10_G dans la colonne B.
- Si on rejoint D : le coût total du chemin sera de $7 + 13 = 20$. $20 < 21$ ce trajet pour aller jusqu'à D est plus rapide que le précédent, on note donc 20_G dans la colonne D.

	A	B	C	D	E	F	G
Départ	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{0_C}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
C(0)	$+\infty$	$+\infty$		21_C	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{7_C}$
G(7)	$+\infty$	$\mathbf{10_G}$		20_G	$+\infty$	$+\infty$	

(suite)

On sélectionne le plus petit résultat de la dernière ligne. Ici 10_G. On peut oublier les cases en-dessous, on vient de trouver le chemin le plus court menant jusqu'à B en partant de C.

A partir de B, on peut rejoindre aucun nœud. Il se passe donc rien à cette étape.

	A	B	C	D	E	F	G
Départ	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{0_C}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
C(0)	$+\infty$	$+\infty$		21_C	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{7_C}$
G(7)	$+\infty$	$\mathbf{10_G}$		20_G	$+\infty$	$+\infty$	
B(10)	$+\infty$			$\mathbf{20_G}$	$+\infty$	$+\infty$	

On sélectionne le plus petit résultat de la dernière ligne. Ici 20_G. On peut oublier les cases en-dessous , on vient de trouver le chemin le plus court menant jusqu'à D en partant de C.

A partir de D, on peut rejoindre seulement E avec un poids de 4.

- Si on rejoint E : le coût total du chemin sera de $20 + 4 = 24$. $24 < +\infty$, ce trajet pour aller jusqu'à E est plus rapide que le précédent, on note donc 24_D dans la colonne E.

	A	B	C	D	E	F	G
Départ	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{0_C}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
C(0)	$+\infty$	$+\infty$		21_C	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{7_C}$
G(7)	$+\infty$	$\mathbf{10_G}$		20_G	$+\infty$	$+\infty$	
B(10)	$+\infty$			$\mathbf{20_G}$	$+\infty$	$+\infty$	
D(20)	$+\infty$				$\mathbf{24_D}$	$+\infty$	

On sélectionne le plus petit résultat de la dernière ligne. Ici 24_D. On peut oublier les cases en-dessous , on vient de trouver le chemin le plus court menant jusqu'à E en partant de C.

A partir de E, on peut rejoindre seulement F et A avec les poids respectifs 2 et 7.

- Si on rejoint F : le coût total du chemin sera de $24 + 2 = 26$. $26 < +\infty$, ce trajet pour aller jusqu'à F est plus rapide que le précédent, on note donc 26_E dans la colonne F.
- Si on rejoint A : le coût total du chemin sera de $24 + 7 = 31$. $31 < +\infty$, ce trajet pour aller jusqu'à A est plus rapide que le précédent, on note donc 31_E dans la colonne A.

	A	B	C	D	E	F	G
Départ	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{0_C}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
C(0)	$+\infty$	$+\infty$		21_C	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{7_C}$
G(7)	$+\infty$	$\mathbf{10_G}$		20_G	$+\infty$	$+\infty$	
B(10)	$+\infty$			$\mathbf{20_G}$	$+\infty$	$+\infty$	
D(20)	$+\infty$				$\mathbf{24_D}$	$+\infty$	
E(24)	31_E					$\mathbf{26_E}$	

On sélectionne le plus petit résultat de la dernière ligne. Ici 26_E. On peut oublier les cases en-dessous , on vient de trouver le chemin le plus court menant jusqu'à F en partant de C.

A partir de F, on peut rejoindre A avec un poids de 4. (On ne se préoccupe pas des sommet dont ont à déjà déterminer les plus court chemin, à savoir B et G ici)

- Si on rejoint A : le coût total du chemin sera de $26 + 4 = 30$. $30 < 31$, ce trajet pour aller jusqu'à F est plus rapide que le précédent, on note donc 30_F dans la colonne A.

(suite)

	A	B	C	D	E	F	G
Départ	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{0_C}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
C(0)	$+\infty$	$+\infty$		21_C	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{7_C}$
G(7)	$+\infty$	$\mathbf{10_G}$		20_G	$+\infty$	$+\infty$	
B(10)	$+\infty$			$\mathbf{20_G}$	$+\infty$	$+\infty$	
D(20)	$+\infty$				$\mathbf{24_D}$	$+\infty$	
E(24)	31_E					$\mathbf{26_E}$	
F(26)	$\mathbf{30_F}$						

On a alors terminé l'algorithme :

	A	B	C	D	E	F	G
Départ	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{0_C}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
C(0)	$+\infty$	$+\infty$		21_C	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{7_C}$
G(7)	$+\infty$	$\mathbf{10_G}$		20_G	$+\infty$	$+\infty$	
B(10)	$+\infty$			$\mathbf{20_G}$	$+\infty$	$+\infty$	
D(20)	$+\infty$				$\mathbf{24_D}$	$+\infty$	
E(24)	31_E					$\mathbf{26_E}$	
F(26)	$\mathbf{30_F}$						
Fin							

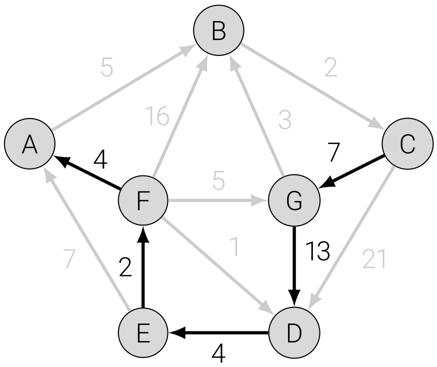
Pour trouver le chemin le plus court entre C et un autre sommet :

Par exemple le chemin le plus court pour aller de C à E :

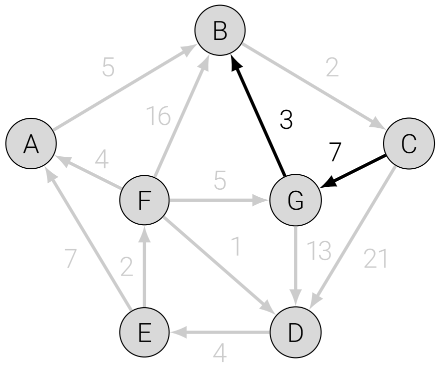
- On regarde dans la colonne de E le dernier résultat (celui avant la case grisé donc). Le nombre indique le poids du chemin le plus court : on lit 24.
- Pour retrouver le chemin correspondant on lit les indices. Avant E on venait de D : ? $\rightarrow D \rightarrow E$
- Avant D on venait de G : ? $\rightarrow G \rightarrow D \rightarrow E$
- Avant G on venant de C : $C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow E$.
- On a ainsi reconstituer le plus court chemin. On fait de même pour les autres. La page suivante recense tout les plus courts chemin.

(suite)

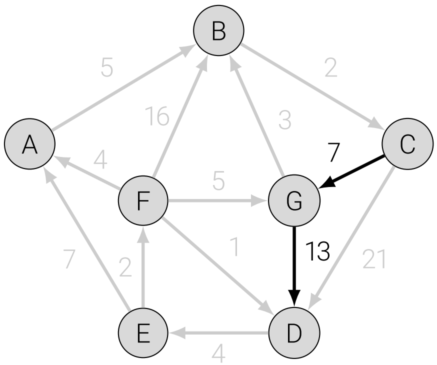
$C \xrightarrow{30} A$



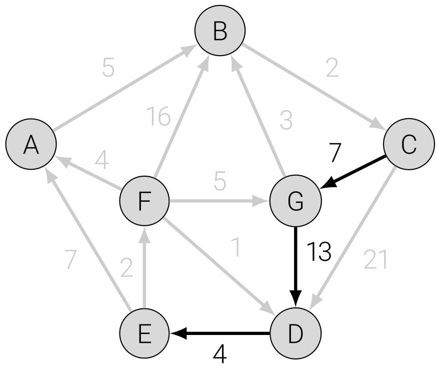
$C \xrightarrow{10} B$



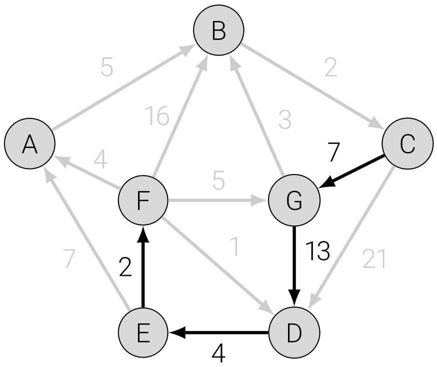
$C \xrightarrow{20} D$



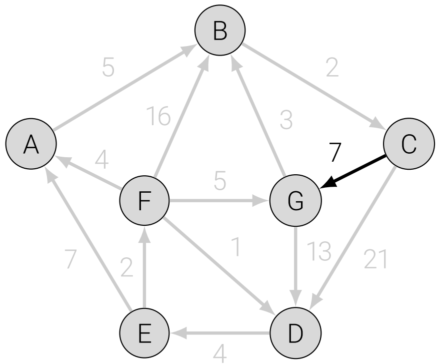
$C \xrightarrow{24} E$



$C \xrightarrow{26} F$

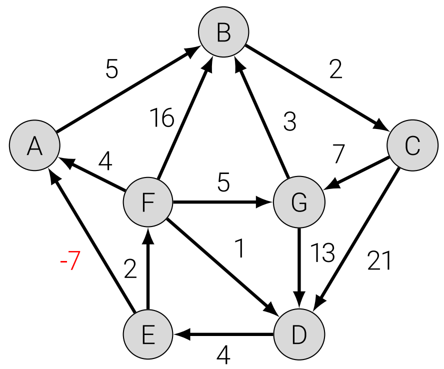


$C \xrightarrow{7} G$



Question 2

On modifie $\mathbb{G}_1$: l'arc $(\mathtt{E}, \mathtt{A})$ est maintenant valué -7 au lieu de 7. Exécuter de nouveau l'algorithme de *Dijkstra* à partir du sommet $\mathtt{F}$. La correction de l'algorithme est-elle conservée ?



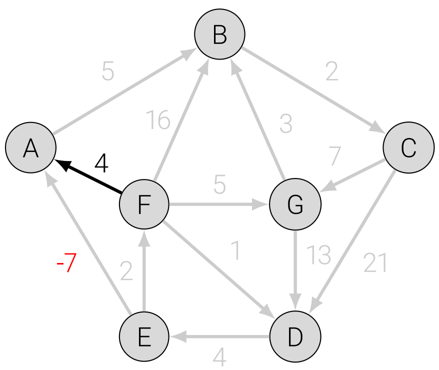
Graphe $\mathbb{G}_1$

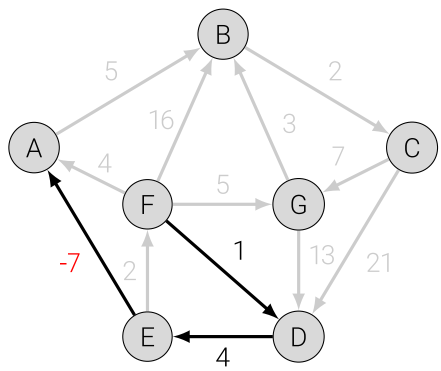
Proposition de solution

Sans détailler l'ensemble des étapes, on obtient :

	A	B	C	D	E	F	G
Départ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\mathbf{0_F}$	$+\infty$
F(0)	4_F	16_F	$+\infty$	$\mathbf{1_F}$	$+\infty$		5_F
D(1)	$\mathbf{4_F}$	16_F	$+\infty$		5_D		5_F
A(4)		9_A	$+\infty$		$\mathbf{5_D}$		5_F
E(5)		9_A	$+\infty$				$\mathbf{5_F}$
G(5)		$\mathbf{8_G}$	$+\infty$				
B(8)			$\mathbf{10_B}$				
Fin							

D'après l'algorithme, le plus court chemin pour aller de F à A serait $F \to A$ de distance 4 (donné sur la figure à gauche). Pourtant, le chemin représenté sur la figure à droite à une distance de $1 + 4 - 7 = -2 < 4$, l'algorithme ne donne donc pas le résultat escompter (*i.e* le plus court chemin).





Le problème de l'algorithme vient du fait qu'il faudrait réintroduire A dans l'ensemble des sommets à traiter.