Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un réel.

a. (*Noyau de Dirichlet*) Exprime simplement

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

b. (*Noyau de Fejér*) Exprime simplement

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \quad \text{pour } n \neq 0$$

c. Montrer que

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx}$$

Correction.

a. On remarque une somme géométrique de raison e^{ix}. On peut traiter le cas $x \equiv 0\ [2\pi]$ à part. Dans ce cas on voit que $D_n(x)$ est simplement la somme de termes tous égaux à 1 et on obtient $D_n(x) = 2n+1$. On traite maintenant le cas $x \not\equiv 0\ [2\pi]$.Par la formule de sommation géométrique, on a

$$D_n(x) = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

De manière classique, on factorise ensuite par l'arc moitié pour faire apparaître l'expression complexe du sinus.

$$D_n(x) = \underbrace{e^{-inx}\frac{e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}}_{0}\frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}x} - e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

b. On peut encore commencer par traiter le cas $x \equiv 0\ [2\pi]$. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $D_k(x) = 2k+1$ d'après le point **a.** et donc on a

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{1}{n}\left(2\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1\right) = \frac{n(n-1)+n}{n} = n$$

Pour le cas $x \not\equiv 0\ [2\pi]$, on remarque que

$$F_n = \frac{1}{n\sin(x/2)}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{2n+1}{2}x}\right) = \frac{1}{n\sin(x/2)}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2n+1}{2}x}\right) = \frac{1}{n\sin(x/2)}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n-1} e^{inx}\right)$$

On utilise encore la formule de sommation géométrique et on factorise par l'arc moitié ensuite,

$$F_n = \frac{1}{n\sin(x/2)}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) = \frac{1}{n\sin(x/2)}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}\right)$$

et donc

$$F_n = \frac{1}{n\sin(x/2)}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{nx}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

c. Pour exprime F_n à partir de l'expression brute de D_n. On a

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{k=-p}^{p} \mathrm{e}^{ikx} \right)$$

On aimerait intervertir les contraintes de sommation. Les indices de sommation sont contraints par $0 \leq p \leq n-1$ et $|k| \leq p$. Ces conditions s'expriment encore $|k| \leq n-1$ et $|k| \leq p \leq n-1$. On peut alors réaliser l'échange des deux sommes :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(\sum_{p=|k|}^{n-1} \mathrm{e}^{ikx} \right)$$

On calcule facilement la somme à l'intérieur puisque le terme de sommation ne dépend pas de p. On obtient,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (n-|k|)\mathrm{e}^{ikx}$$

Finalement, on remarque que si on ajoute les indices de sommation $-k$ et k alors on ajoute deux fois zéro au résultat, et donc on obtient bien la formule demandée

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \mathrm{e}^{ikx}$$

✌