Exercice

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathrm{N}$. Exprimer

$$\textbf{a. } C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \qquad \text{et} \qquad \textbf{b. } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Correction.

On remarque $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ sont respectivement la partie réelle et imaginaire de

$$\mathrm{e}^{ik\theta} = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$$

a. On a donc

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k\right)$$

On a mis ainsi en évidence une somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 0$ puisque $\theta \in]0, 2\pi[$. Avec la formule de sommation géométrique, on obtient alors

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta} - 1}{\mathrm{e}^{i\theta} - 1}$$

L'astuce (classique) ensuite, c'est de factoriser le numérateur et le dénominateur par l'arc moitié :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta/2}}{\mathrm{e}^{i\theta/2}} \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta/2} - \mathrm{e}^{-i(n+1)\theta/2}}{\mathrm{e}^{i\theta/2} - \mathrm{e}^{-i\theta/2}}$$

Sachant que pour tout $x \in \mathrm{R}$, $\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix} = 2i\sin(x)$, on voit que l'on a fait apparaître par cette factorisation des expressions de sinus. Après simplification :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k = \mathrm{e}^{in\theta/2} \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Finalement,

$$C_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k\right) = \cos(n\theta/2) \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

b. Pour la somme de sinus, il suffit de prendre la partie imaginaire :

$$S_n = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k\right) = \sin(n\theta/2) \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

✌