Exercice

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrer la divergence des suites de termes généraux u_n avec :

a. $u_n = (-1)^n$ **b.** $u_n = \cos(n\pi)$ **c.** $u_n = \cos(n\theta)$ **d.** $u_n = \mathrm{e}^{in\theta}$

Correction.

a. Il suffit de trouver deux sous-suites aux comportements asymptotiques différents. La suite extraite (u_{2n}) des termes pairs est constante à 1 et converge donc vers 1 tandis que la suite extraite (u_{2n+1}) est constante à -1 et converge donc vers -1. La suite (u_n) est donc divergente.

b. La suite extraite (u_{2n}) des termes pairs est constante à 1 et converge donc vers 1 tandis que la suite extraite (u_{2n+1}) est constante à -1 et converge donc vers -1. La suite (u_n) est donc divergente.

c. Il est plus difficile de reprendre l'argument précédent. On va raisonner par l'absurde cette fois-ci en montrant que l'existence de la limite est incompatible avec les formules de trigonométrie. Par l'absurde, supposons que $(\cos(n\theta))$ converge vers une limite ℓ. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Rappel : (Formule de factorisation) Pour p et q réels,

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Avec cette formule, on écrit

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$$

Un passage à la limite dans l'expression précédente donne alors

$$2\ell = 2\ell\cos(\theta)$$

Sachant que $\theta \in]0, 2\pi[$, $\cos(\theta) \neq 1$ et donc

$$2\ell(1 - \cos(\theta)) = 0$$

entraine que $\ell = 0$ par intégrité.

D'autre part, pour tout réel a, $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$. On obtient donc avec cette formule d'addition,

$$\cos(2n\theta) = 2\cos^2(n\theta) - 1$$

et par passage à la limite on obtient

$$\ell = 2\ell^2 - 1$$

Ou encore, sachant que $\ell = 0$ par la première partie, $0 = -1$. *Absurde.* La suite $(\cos(n\theta))$ est donc divergente.

d. Puisque $\mathrm{e}^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. Le **c.** montre que la suite diverge puisque sa partie réelle diverge. On peut fournir une démonstration plus directe. Si une suit (u_n) tend vers une limite ℓ alors nécessairement $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 (condition nécessairement mais pas suffisance). Soit $n \in \mathbb{N}$. En factorisant, on peut écrire,

$$u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{in\theta}\left(\mathrm{e}^{i\theta} - 1\right)$$

Donc $|u_{n+1} - u_n| = \mathrm{e}^{i\theta} - 1$ constante non nulle qui ne peut pas tendre vers 0. Donc nécessairement la suite diverge.

✌