Équivalent de la série harmonique

Exercice

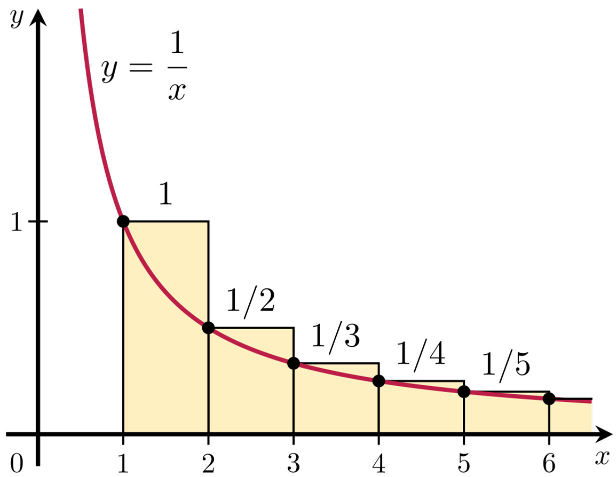
On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Trouver un équivalent en $+\infty$ de H_n.

Correction.

Pour trouver un équivalent d'une série, il est classique d'effectuer une *comparaison série-intégrale*.



Puisque la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante, on a, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}.$$

Sommant cette relation pour k allant de 2 à n, puis ajoutant 1 , on obtient :

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}.$$

Calculant l'intégrale, on trouve :

$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

On en déduit que

$$\frac{H_n}{\ln n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

et donc

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$$

✌