Exercice

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := a^n + b^n$.

a. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

b. On suppose $|a| = |b| = 1$. À quelle condition nécessaire et suffisante la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle convergente ?

Correction.

a. Lorsque $a = b, u$ est une suite géométrique de raison a qui vérifie la relation $u_{n+1} = au_n$. Lorsque $a \neq b$, les suites satisfaisant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - (a+b)u_{n+1} + abu_n = 0$$

sont exactement celles de la forme $(Aa^n + Bb^n)_{n\geqslant 0}$ avec $A, B \in \mathbb{C}$, puisque les racines de l'équation caractéristique sont a et b (relations coefficients/racines). Par conséquent, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie bien cette relation de récurrence.

b. Supposons d'abord que $a \neq b$. Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite ℓ. On a alors

$$\begin{cases} a^n + b^n & \to \ell \\ a^{n+1} + b^{n+1} & \to \ell \end{cases}$$

on obtient, en multipliant la première ligne par a et en la soustrayant a la seconde, que

$$b^n(b-a) \to \ell(1-a)$$

Donc $(b^n)_{n\geqslant 0}$ converge et comme $|b| = 1$, on obtient $b = 1$. De même, $a = 1$, ce qui est une contradiction.

Reste la possibilité $a = b$, qui conduit à nouveau au fait que $(b^n)_{n\geqslant 0}$ converge, donc que $a = b = 1$. Réciproquement, si $a = b = 1$, la converge est évidente. La limite de $(a^n + b^n)_{n\geqslant 0}$ est alors égale à 2 .

✌

$$u_n = a^n + b^n$$