

Dérivation et primitives. Applications à la cinématique du point.

Vincent LE GRUIEC

4 mars 2024

Table des matières

1	Notion de nombre dérivé en lien avec la physique	2
1.1	Approche physique	2
1.2	Approche mathématique	3
2	Dérivation	4
2.1	Définitions et interprétations	4
2.2	Déterminer graphiquement un nombre dérivé	6
2.3	Dérivée des fonctions élémentaires	6
2.3.1	Tableau résumé des dérivées des fonctions usuelles	7
2.3.2	Dérivées et opérations	7
2.4	Résumé	7
3	Primitives	8
3.1	Définition et propositions	8
3.2	Tableau des primitives usuelles	8
3.3	Exemples	9
3.4	Généalogie fonctionnelle (Résumé)	9
4	Cinématique du point	10
4.1	Vecteur position	10
4.2	Vecteur vitesse	10
4.3	Vecteur accélération	11
4.4	Résumé	11
5	Les lois de Newton	12
5.1	Première loi ou principe d'inertie	12
5.2	Deuxième loi ou principe fondamental de la dynamique	12
6	Mouvement d'un projectile - exemple type à savoir faire et refaire	12
6.1	Équations horaires	13
6.2	Équation de la trajectoire	13
6.3	Calcul de la portée	14
6.4	Calcul de la flèche	14
6.4.1	Première méthode : utiliser l'équation cartésienne	14
6.4.2	Deuxième méthode : tangente horizontale	15

1 Notion de nombre dérivé en lien avec la physique

1.1 Approche physique

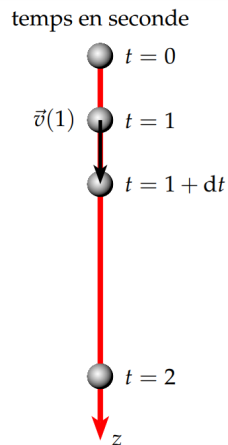
Une petite pièce, admettant donc peu de résistance à l'air (par exemple un Penny), est lâchée du toit de l'Empire State Building. Est-ce dangereux si quelqu'un la reçoit sur sa tête et quelle est la vitesse de la pièce au moment de l'impact ?

On donne les informations suivantes :

- hauteur du toit de l'Empire State Building : 381 m ;
- distance (en m) parcourue par un corps en chute libre, sans tenir compte de la résistance de l'air, en fonction du temps (en s) :

$$z(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

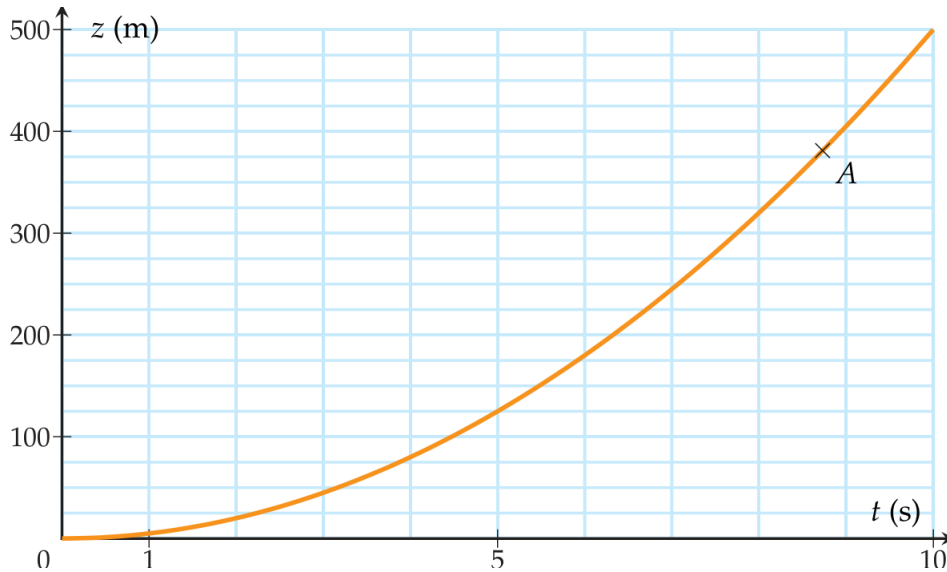
où $g \approx 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur.



1. Déterminer le temps mis par la pièce pour arriver au sol. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
2. (a) Calculer la vitesse moyenne de la pièce depuis l'instant du lâcher jusqu'au moment de l'impact, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ puis en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
(b) Est-ce une bonne estimation de la vitesse au moment de l'impact ? Si ce n'est pas le cas, expliquer pourquoi et proposer une meilleure estimation.
(c) Une fois une bonne estimation trouvée, répondre à la question de la dangerosité.

1.2 Approche mathématique

On donne la représentation graphique de la fonction z dans un repère orthogonal. Sur cette courbe, on considère le point A d'abscisse 8,73.



1. Étude graphique

- Soit M le point de la courbe d'abscisse 0. Que représente le coefficient directeur de (AM) ?
- Même question avec le point M d'abscisse 8, puis 8,5, puis 8,6, puis...
- Tracer la tangente \mathcal{T}_A à la courbe au point A , c'est-à-dire la droite « touchant » localement la courbe une seule fois en A , avec la plus grande précision. Que représente son coefficient directeur ? Le lire le plus précisément possible.

2. Étude algébrique

Le but est de calculer la valeur du coefficient directeur de \mathcal{T}_A . Pour cela, on utilise l'expression de la fonction : $z(t) = 5t^2$.

On considère la droite (AM) , où M est un autre point de la courbe, « assez proche de A », c'est-à-dire d'abscisse $8,73 + h$, avec h « assez proche de 0 ».

- La droite (AM) est dite à la courbe.
 - Exprimer le coefficient directeur de (AM) en fonction de h puis simplifier au maximum l'expression obtenue.
 - Lorsque M se rapproche de A , que se passe-t-il géométriquement pour la droite (AM) ?
 - Lorsque M se rapproche de A , que se passe-t-il numériquement pour h ?
 - En déduire la valeur exacte du coefficient directeur de \mathcal{T}_A .
3. Dans le **cas général**, on considère un point A d'abscisse a .
En reprenant le principe d'étude de la question 2., déterminer une formule permettant d'obtenir le coefficient directeur de \mathcal{T}_A . Que représente-t-il ?

2 Dérivation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et $a \in I$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

2.1 Définitions et interprétations

Définition 1 Accroissement moyen

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts appartenant à I . On appelle *accroissement moyen* de f entre x_1 et x_2 la quantité :

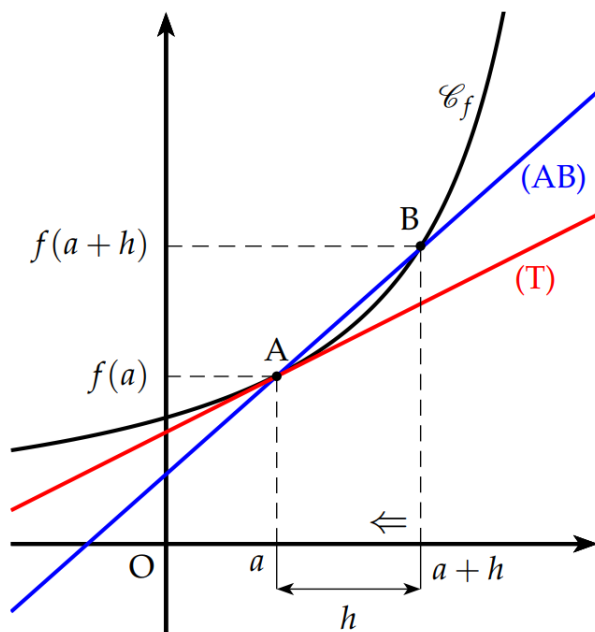
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1 ; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

En notant $x_1 = a$ et $x_2 = a + h$ avec $h \neq 0$, on obtient :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarque 1. $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1 ; x_2)$ est le coefficient directeur de la droite sécante à la courbe passant par les points $A(x_1 ; f(x_1))$ et $B(x_2 ; f(x_2))$.

Interprétation : Si f représente la distance parcourue par un mobile en fonction du temps, l'accroissement moyen représente la **vitesse moyenne** du mobile entre les instants x_1 et x_2 .



Le coefficient directeur $\mathcal{T}(h)$ de la droite (AB), pour $h \neq 0$, est :

$$\mathcal{T}(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si le point B se rapproche du point A (h tend vers 0), la droite (AB) se rapproche de la tangente (\mathcal{T}) à la courbe en $x = a$. Le coefficient directeur de cette tangente (T) est appelé nombre dérivé noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

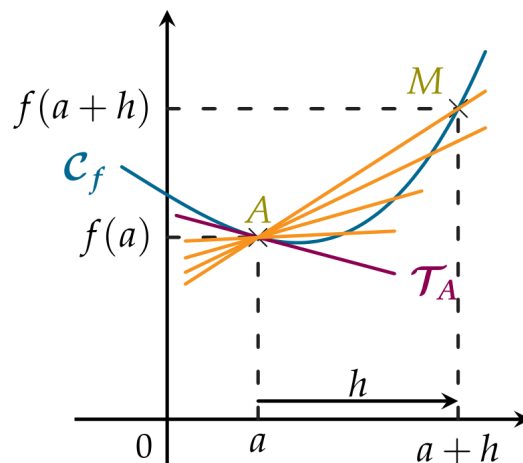
Définition 2

La fonction f admet un nombre dérivé, noté $f'(a)$, en a , si et seulement si, le taux de variation de la fonction f en a admet une limite finie quand h tend (se rapproche) de 0, c'est à dire :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La notation $h \rightarrow 0$ signifie que h tend vers zéro sans l'atteindre ($h \neq 0$).

Interprétation : Si f représente la distance parcourue par un mobile en fonction du temps, le taux d'accroissement $\mathcal{T}(h)$ représente la vitesse moyenne entre les instants a et $a+h$. Plus h est petit, autrement dit plus $a+h$ est proche de a , plus cette vitesse moyenne entre ces deux instants donne une approximation de la vitesse précise du mobile à l'instant a . Ainsi, à la limite quand h tend vers 0, le nombre dérivé représente la **vitesse instantanée** du mobile à l'instant a .



Définition 3

Si, pour tout réel $a \in I$, $f'(a)$ existe, on dit que f est dérivable sur I .
On définit alors une nouvelle fonction f' sur I par :

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Remarque 2. Toutes les fonctions ne sont pas dérivables. L'objectif ici est d'étudier des cas simples.

Notations : En physique, le nombre dérivé de f en a est le plus souvent noté

$$\frac{df}{dx}(a)$$

Le dx au dénominateur signifie que la variable de dérivation est x . Souvent (pour ne pas dire tout le temps), la variable de dérivation est t (pour le temps) en physique. Ainsi, pour noter la dérivée d'une fonction f qui dépend du temps t à l'instant t_0 , on notera

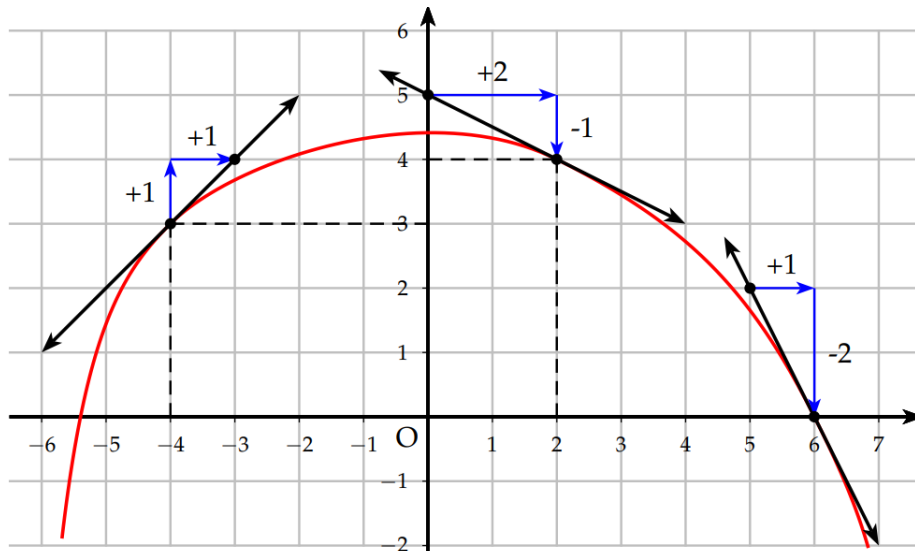
$$\frac{df}{dt}(t_0)$$

2.2 Déterminer graphiquement un nombre dérivé

Proposition 1 Coefficient directeur de la tangente

Le nombre $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

Exemple 1. On donne la courbe \mathcal{C}_f d'une fonction f . En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée. La fonction f admet donc des nombres dérivés en ces points. Lire, en se servant du quadrillage les nombres suivants : $f'(-4)$, $f'(2)$ et $f'(6)$



2.3 Dérivée des fonctions élémentaires

2.3.1 Fonction affine

Soit f la fonction affine suivante : $f(x) = ax + b$ Déterminons le taux de variation en x , pour $h \neq 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

On passe à la limite : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} a = a$$

2.3.2 Fonction carrée

Soit f la fonction carrée : $f(x) = x^2$ Déterminons le taux de variation en x , pour $h \neq 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

On passe à la limite : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{F}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

2.3.3 Fonction puissance (admis)

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^* \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = nx^{n-1}$$

Exemple 2. Soit $f(x) = x^5$ on a alors $f'(x) = 5x^4$.

2.3.1 Tableau résumé des dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$

Remarque 3. Les premières lignes ne sont que des cas particuliers de la dernière.

2.3.2 Dérivées et opérations

Proposition 2 Dérivation : somme et produit

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- La fonction $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ est dérivable sur I et on a $(f + g)' = f' + g'$.
- La fonction $kf : x \mapsto kf(x)$ est dérivable sur I et on a $(kf)' = kf'$.

Exemple 3. En cinématique, au lycée, il suffit de savoir dériver des fonctions polynomiales. On va rester dans ce cadre.

- $f_1 : x \mapsto x^2 + x + 1; \quad f_1' : x \mapsto 2x + 1$
- $f_2 : x \mapsto 4x^2 + 3x + 8; \quad f_2' : x \mapsto 8x + 3$
- $f_3 : x \mapsto x^{34} + 3x^7 + 2x; \quad f_3' : x \mapsto 34x^{33} + 21x^6 + 2$
- $f_4 : x \mapsto 6x^3 + 3x^2 + x + 102; \quad f_4' : x \mapsto 18x^2 + 6x + 1$

2.4 Résumé

Essentiellement, pour la cinématique au lycée, il suffit de retenir :

- Si f représente la distance parcourue d'un mobile en mouvement en fonction du temps, alors le **nombre dérivé** de f à l'instant t_0 fixé représente la **vitesse instantanée** du mobile à l'instant t_0 . En mathématique, on note $f'(t_0)$ le nombre dérivé de f en t_0 .
- En physique, pour une fonction qui dépend de la variable t , on utilise la notation suivante qui permet de rendre compte que l'on dérive la fonction f par rapport au temps :

$$f'(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)$$

- En cinématique, au lycée, il suffit de connaître la formule suivante pour la plupart des exercices :

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

- Pour dériver une somme, on fait la somme des dérivées, par exemple, on s'appuyant sur **c.**, la fonction dérivée de $f : x \mapsto 6x^3 + 3x^2 + x + 102$ est $f' : x \mapsto 18x^2 + 6x + 1$.

3 Primitives

3.1 Définition et propositions

Définition 4

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .
Une primitive de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque 4. On dit que F est *une* primitive de f et non pas *la* primitive de f car une fonction admettant une primitive n'en admet pas une seule, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 4. Soit $f : x \mapsto 2x$ définie sur \mathbb{R} . Alors $F_1 : x \mapsto x^2$ est une primitive de f sur \mathbb{R} . De même, $F_2 : x \mapsto x^2 + 1$ est aussi une primitive de f sur \mathbb{R} . On a $F_1' = F_2' = f$.

Remarque 5. Chercher une primitive d'une fonction f revient donc à se poser la question suivante

Quelle fonction ai-je dérivé pour obtenir f ?

Proposition 3 : Lien entre les primitives

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Alors f admet une infinité de primitives sur I qui sont toutes de la forme

$$x \mapsto F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ainsi, deux primitives d'une fonction diffèrent d'une constante.

Remarque 6. La constante est très importante en physique, elle contient les données initiales du problème (vitesse initiale, position initiale, etc.)

Proposition 4 : Condition d'unicité de la primitive

Soient $x_0 \in I$ et y_0 deux réels donnés. Parmi toutes les primitives d'une fonction f définie et continue sur I , il en existe une seule qui vérifie la condition $F(x_0) = y_0$.

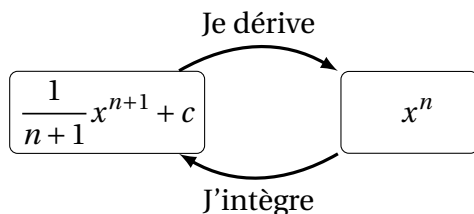
3.2 Tableau des primitives usuelles

La lettre c désigne une constante quelconque.

Fonction f définie par	Les primitives F sont	Domaine de validité
$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$F(x) = kx + c$	\mathbb{R}
$f(x) = ax, k \in \mathbb{R}$	$F(x) = \frac{a}{2}x^2 + c$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	\mathbb{R}

3.3 Exemples

Remarque 7. Contrairement à la dérivation, il est souvent très difficile de trouver une primitive pour une fonction donnée. Cependant, il existe des classes de fonctions dont on sait très bien trouver une primitive. Par exemple, il est facile de trouver des primitives de fonctions polynomiales. En physique, au lycée, il suffit de savoir trouver des primitives de polynômes pour résoudre les exercices. Tout repose sur la formule suivante :



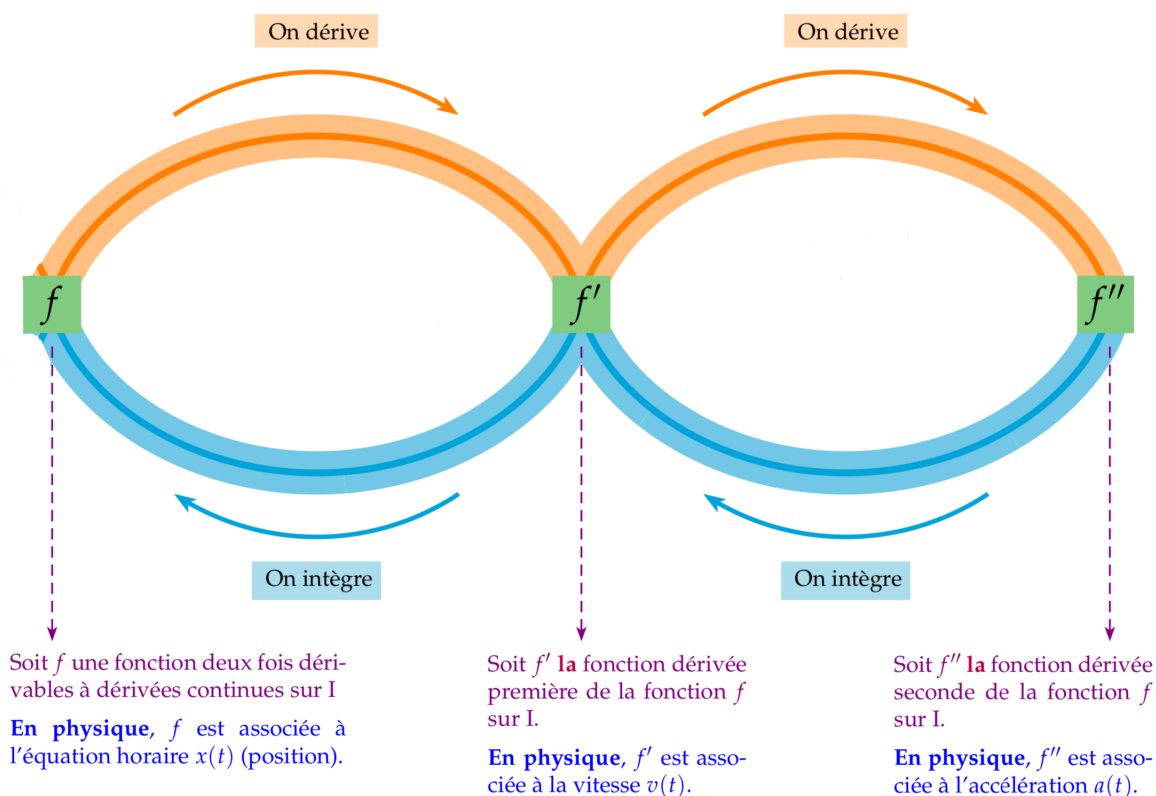
Exemple 5. $f_1 : x \mapsto 2$. Les primitives sont de la forme $F_1 : x \mapsto 2x + c$ avec c une constante.

Exemple 6. $f_2 : x \mapsto 5x$. Les primitives sont de la forme $F_1 : x \mapsto \frac{5}{2}x^2 + c$.

Exemple 7. $f_1 : x \mapsto 5x + 2$. Les primitives sont de la forme $F_1 : x \mapsto \frac{5}{2}x^2 + 2x + c$.

Exemple 8. $f_4 : x \mapsto 3x + 1$. Les primitives sont de la forme $F_4 : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + x + c$.

3.4 Généalogie fonctionnelle (Résumé)



4 Cinématique du point

4.1 Vecteur position

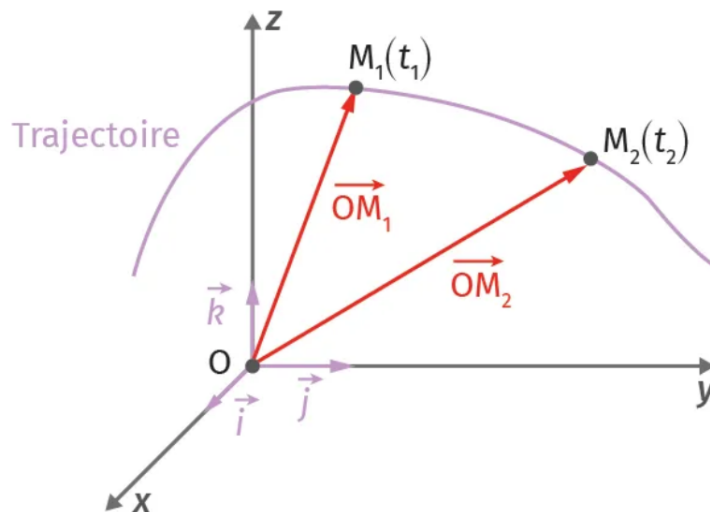
Définition 5

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ d'un point M évoluant dans l'espace en fonction du temps t , est donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Les expressions de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont appelées les équations horaires du mouvement. Ce sont des fonctions qui dépendent du temps.

Exemple 9.



4.2 Vecteur vitesse

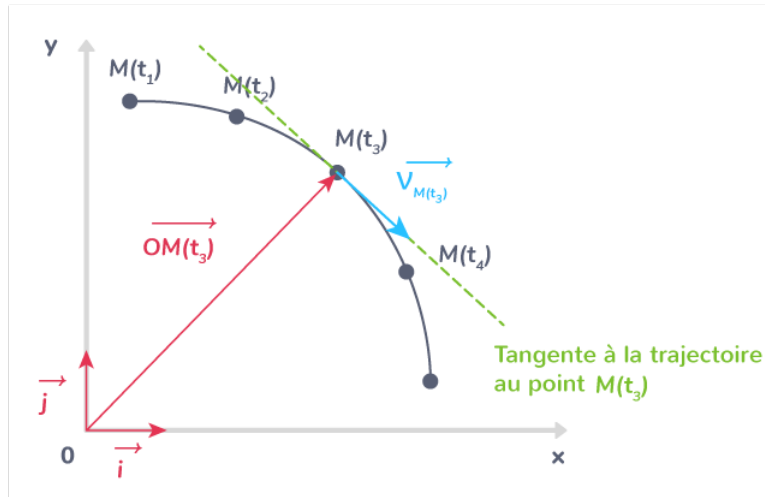
Définition 6

Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est défini mathématiquement par la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ par rapport au temps.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \\ v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire au point M et dans le sens du mouvement

Exemple 10. Exemple en dimension deux.



Remarque 8. La définition de ce vecteur a été expliquée dans l'activité introductive sur la dérivation.

4.3 Vecteur accélération

D'une façon analogue au vecteur vitesse \vec{v} , on définit le vecteur accélération \vec{a} .

Définition 7

On définit le vecteur accélération \vec{a} comme la dérivée du vecteur vitesse en fonction du temps

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

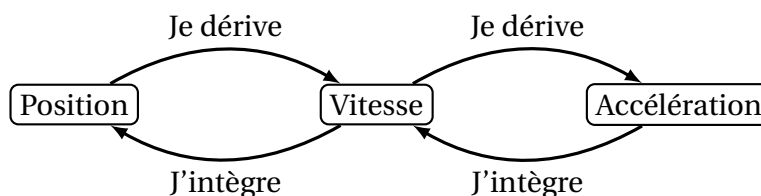
Si on revient au vecteur position, le vecteur accélération est donc la dérivée seconde du vecteur \overrightarrow{OM} en fonction du temps. En utilisant la notation différentielle, on obtient :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} \\ a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z(t) = \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}$$

La *vitesse* est une variation de distance par rapport au temps, son unité est donc $m \cdot s^{-1}$, l'accélération est une variation de vitesse par rapport au temps, son unité est donc $m \cdot s^{-2}$.

4.4 Résumé



5 Les lois de Newton

5.1 Première loi ou principe d'inertie

Théorème 1

Dans un référentiel galiléen, tout système reste immobile ou conserve un mouvement rectiligne uniforme aussi longtemps que la somme vectorielle des forces extérieures est nulle.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \iff \begin{array}{l} \text{système en repos ou} \\ \text{en mouvement rectiligne uniforme} \end{array}$$

Définition 8

On appelle référentiel galiléen ou référentiel d'inertie, un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié. On admettra que les référentiels terrestre, géocentrique et héliocentrique sont des référentiels galiléens dans leur domaine de validité.

5.2 Deuxième loi ou principe fondamental de la dynamique

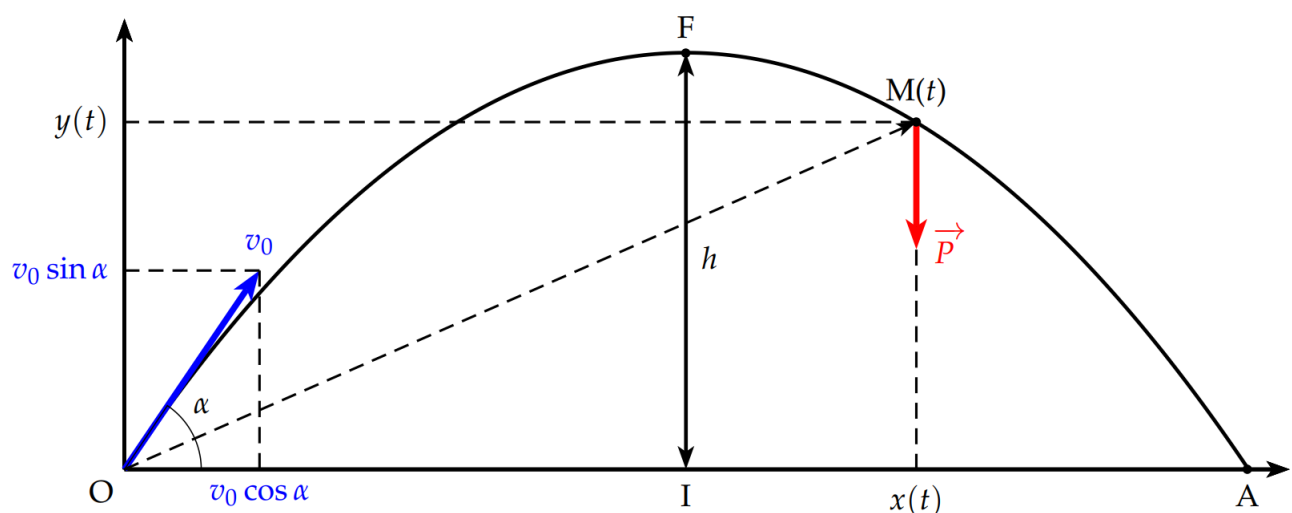
Théorème 2 : Principe fondamental de la dynamique (PFD)

La somme vectorielle des forces extérieures s'exerçant sur un solide (masse constante) est proportionnelle à son accélération.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

6 Mouvement d'un projectile - exemple type à savoir faire et re-faire

On lance un ballon de foot avec un angle α par rapport à l'horizontale avec une vitesse initiale v_0 . On peut alors faire le schéma suivant :



6.1 Équations horaires

Le référentiel terrestre peut être considéré comme **galiléen** car correspondant aux conditions de laboratoire. On considère le repère Oxy , plan correspondant au mouvement : Ox correspondant à l'horizontale et Oy à la verticale.

La seule force extérieure au système (le ballon de foot) **est le poids** $\vec{P} = m\vec{g}$.

D'après la **seconde loi de Newton** (PFD), on a :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

Donc ici,

$$\vec{P} = m\vec{a} \iff m\vec{g} = m\vec{a} \iff \vec{a} = \vec{g}$$

On intègre deux fois le vecteur accélération, que l'on projette sur les deux axes, pour obtenir les équations horaires du système. En intégrant une première fois le vecteur accélération, on obtient le vecteur vitesse :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \implies \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ -gt + c_1 \end{pmatrix}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes. Pour déterminer les constantes, il faut regarder les **conditions initiales**. À l'instant $t = 0$, $\vec{v}(0) = (c_1, c_2) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$ (utiliser les formules de trigonométrie). Le vecteur vitesse est donc

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ -gt + v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

En intégrant ensuite le vecteur vitesse, on obtient le vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ -gt + v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \alpha)t + c_3 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + c_4 \end{pmatrix}$$

Encore une fois, les constantes d'intégration c_3 et c_4 renferment les **conditions initiales**. À l'instant $t = 0$, $\overrightarrow{OM}(t) = (c_3, c_4) = (0, 0)$.

On obtient alors les équations **horaires** du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha)t & (1) \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t & (2) \end{cases}$$

6.2 Équation de la trajectoire

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il faut isoler t dans l'équation horaire (1) puis le remplacer dans l'équation horaire (2) : De (1), on a :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

On remplace dans (2) :

$$y(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)$$

On obtient l'équation **cartésienne** de la trajectoire suivante :

$$y(x) = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x$$

6.3 Calcul de la portée

La trajectoire est donc une parabole. Pour déterminer la portée, il faut déterminer la distance OA, c'est-à-dire la distance x_A où le ballon retombe sur le sol soit pour $y = 0$. D'après l'équation de la trajectoire, on a :

$$\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x = 0 \iff x \left(\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) = 0$$

La solution x_A étant la solution non nulle, on a :

$$\begin{aligned} \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_A + \tan \alpha &= 0 \\ x_A &= \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} \\ x_A &= \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \end{aligned}$$

D'après les formules de duplication : $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, on a :

$$OA = x_A = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Remarque : Pour déterminer la portée maximale, on doit avoir $\sin 2\alpha = 1$ qui correspond à $\alpha = \frac{\pi}{4}$

6.4 Calcul de la flèche

La flèche correspond à la hauteur maximale atteinte par le ballon. Sur notre schéma, la flèche correspond à la hauteur h atteinte pour l'abscisse OI.

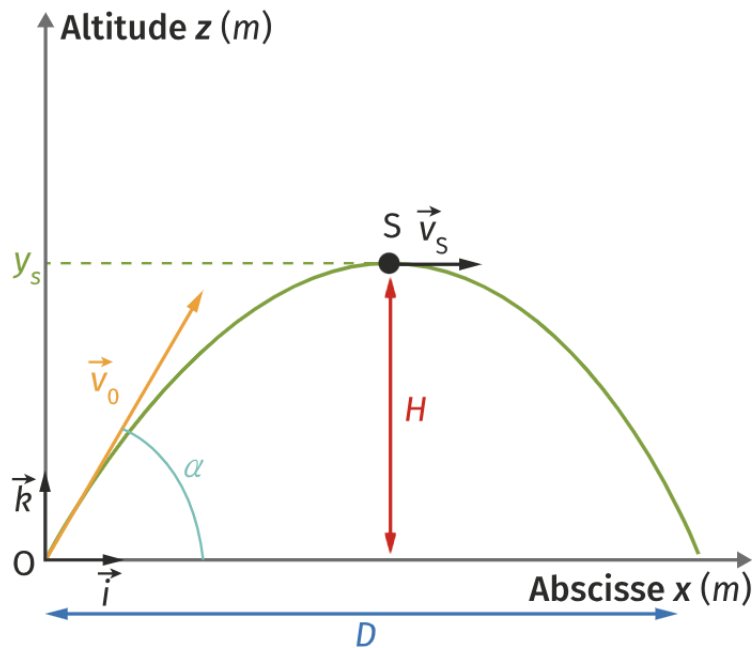
6.4.1 Première méthode : utiliser l'équation cartésienne

L'abscisse du sommet de la parabole est $x_F = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}$. On évalue ensuite l'équation cartésienne en x_F , on obtient

$$\begin{aligned} h &= \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_F^2 + \tan \alpha x_F \\ &= \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \times \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{4g^2} + \tan \alpha \times \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \\ &= -\frac{v_0^2 (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2}{8g \cos^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{v_0^2 (2 \sin \alpha \cos \alpha)}{2g} \\ &= -\frac{4v_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{8g \cos^2 \alpha} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} \\ &= -\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{aligned}$$

6.4.2 Deuxième méthode : tangente horizontale

La flèche est obtenue lorsque la vitesse est horizontale soit quand $v_y(t) = 0$ (le vecteur vitesse forme une tangente horizontale)



On a alors :

$$-gt + v_0 \sin \alpha = 0 \iff t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

On remplace alors dans l'équation horaire de $y(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} h &= -\frac{1}{2} \times \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \times \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \\ &= -\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \end{aligned}$$

Aucun des résultats précédents n'est à retenir. Il faut retenir les méthodes pour retrouver les équations selon le contexte.