Dérivation et intégration pour la cinématique du point

1 Exercices de mise en route

Exercice 1

Un point M a pour équations horaires dans le référentiel terrestre :

$$x(t) = t+1, y(t) = 3t-2 \text{ et } z(t) = 2.$$

a. Décrire la trajectoire du point M

b. Déterminer la distance OM à la date $t = 3$ s

Exercice 2

Un point M a pour équations horaires dans le référentiel terrestre : $x(t) = 2t^2 - 3t + 1$, $y(t) = 3t-2$ et $z(t) = 2$.

a. Calculer les coordonnées du vecteur vitesse au cours du temps

b. Déterminer la vitesse du point M à l'instant $t = 5$ s

Exercice 3

Un point M a pour équations horaires dans le référentiel terrestre : $x(t) = 2t^2 - 3t + 1$, $y(t) = 3t-2$ et $z(t) = 2$.

Déterminer la l'accélération du point M à l'instant $t = 2$ s.

Exercice 4

Les coordonnées d'un mobile dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, associé au référentiel terrestre, sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = 4t - 2 \\ y(t) = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$$

a. Déterminer la position du mobile aux instants $t = 0$ et $t = 2$ s

b. Déterminer l'accélération du mobile à l'instant $t = 10$ s

c. Établir l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile M et en donner une représentation en indiquant le sens de parcours du point M

Exercice 5 : Mouvement rectiligne uniforme

Définition : On appelle mouvement rectiligne uniforme un mouvementdans lequel le mobile se déplace sur une droite à vitesse constante. ***Question :*** Déterminer l'équation horaire du vecteur accélération et du vecteur position d'un tel mouvement.

Exercice 6 : Mouvement rectiligne uniformément varié

Définition : On appelle mouvement rectiligne uniformément varié un mouvement dans lequel le mobile se déplace sur une droite avec une accélération contante.

a. Déterminer l'équation horaire du vecteur vitesse et du vecteur position d'un tel mouvement.

b. Un mobile M subit une accélération contante sur l'axe Ox tel que $a = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. On suppose qu'à $t = 0$ s, le point M est immobile en O. Déterminer la distance parcourue par M à l'instant $t = 5$ s.

2 Modélisation

Exercice 7 : Crash test

Lors d'un crash test, on mesure la déformation d'une voiture au cours d'un choc. On modélise la voiture par son centre de masse M, en mouvement rectiligne selon l'axe $(0x)$ au moment du choc. À 64 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, la voiture absorbe le choc en une distance $L = 50$ cm. L'équation horaire de la position, au moment du choc, est modélisée par :

$$x(t) = -kt^2 + v_0 t$$

k et v_0 sont des constantes.

a. Déterminer l'équation horaire de la vitesse du point considéré $v_x(t)$. La vitesse de la voiture, au moment du choc, est-elle constante ?

b. Montrer que la constante v_0 est la vitesse initiale de la voiture. Déterminer sa valeur en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

c. Déterminer l'expression de l'accélération $a_x(t)$.
Exprimer sa norme en fonction de k.

d. On note t_1 l'instant où la voiture s'arrête.

(a) Exprimer t_1 en fonction de v_0 et k.

(b) Sachant qu'à cet instant le point M s'est déplacé d'une longueur L, exprimer k en fonction de v_0 et L.

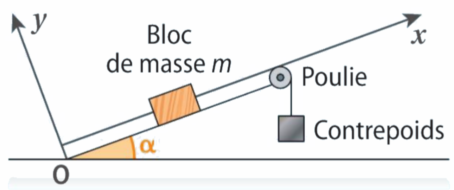
(c) Calculer la norme de l'accélération. L'exprimer en multiple de la norme du champ de pesanteur $g\ (g = 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2})$.

(d) Refaire ce calcul pour une voiture absorbant le choc en une distance $L = 100$ cm. Commenter le résultat.

3 Première loi de Newton (trigonométrie)

Exercice 8 : Une poulie

Un bloc de masse $m = 10{,}0$ kg est posé sur un plan incliné d'angle $\alpha = 20{,}0°$ avec l'horizontale. Le bloc est tiré en ligne droite à l'aide d'un contrepoids par l'intermédiaire d'une poulie. Le bloc avance à vitesse constante de norme $v_0 = 0{,}20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On étudie le système $\{bloc\}$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen et on néglige toute action de l'air. On suppose que le bloc subit des frottements de norme constante de la part du plan incliné et que la tension du fil est une force constante de norme $F = 100$ N.



a. Faire le bilan des forces s'appliquant sur le bloc.

b. Sans souci d'échelle, représenter les forces s'appliquant sur le bloc, que l'on matérialisera par un point matériel.

c. En utilisant une des lois de Newton que l'on énoncera, déterminer la norme de chacune des forces.

Donnée : Norme du champ de pesanteur terrestre $g = 9{,}81\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$.

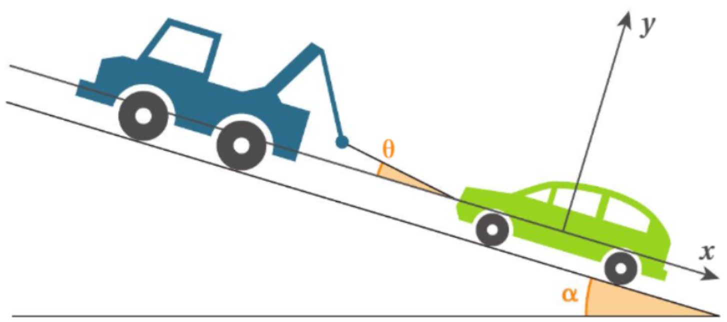
Exercice 9 : Voiture en panne

a. Une voiture de masse $m = 1250\,\text{kg}$ est tombée en panne. Elle est à l'arrêt dans une rue de pente 30%, soit un angle $\alpha = 16,7°$.

(a) Faire le bilan des forces s'exerçant sur la voiture. Les représenter sur un schéma sans souci d'échelle.

(b) Appliquer la première loi de Newton pour déterminer la norme de chacune des forces.

b. Une dépanneuse vient en aide à la voiture et la tracte à vitesse constante à l'aide d'un câble formant un angle $\theta = 10,0°$ avec la route. La force de tension du câble a pour norme $T = 6,60 \times 10^3$ N.



Déterminer les normes de la réaction normale du sol sur la voiture et de la force de frottement de la route qu'elle subit, opposée au mouvement.

4 Seconde loi de Newton

Exercice 10

Une femme en traîneau est tractée par des chiens exerçant, en phase d'accélération, une force $F = 1,2 \times 10^2$ N parallèlement au sol. On négligera tout frottement avec le sol enneigé ou avec l'air. On étudiera le système { traîneau + femme}, de masse totale $m = 2,0 \times 10^2$ kg, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

a. Faire le bilan des forces s'appliquant sur le système { traîneau + femme}.

b. Sans souci d'échelle, faire un schéma de la situation en modélisant le système par un point matériel et en représentant les forces qui s'exercent sur lui, ainsi que le système d'axes qui sera utilisé pour les projections.

c. À l'aide de la deuxième loi de Newton, donner la norme de l'accélération.

d. Quelle est la nature du mouvement ?

Exercice 11 : L'exercice type

L'athlète tchèque Barbora Špotáková a battu en 2008 le record du monde de lancer de javelot féminin avec un jet de portée $L = 72{,}28$ m. On modélise le javelot, de masse $m = 600$ g, par son centre de masse. On supposera qu'il subit uniquement son poids. Au moment du lâcher, il se trouve à $h = 1{,}75$ m au-dessus du sol. Sa vitesse initiale $\vec{v}_0$ forme un angle $\alpha = 45{,}0°$ au-dessus de l'horizontale.

a. Faire un schéma de la situation définissant un repère d'étude et préciser les coordonnées de $\vec{v}_0$.

b. Déterminer les équations horaires de la vitesse et de la position du point modélisant le javelot.

c. En déduire que l'équation de la trajectoire du javelot est :

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{{v_0}^2\cos^2(\alpha)} + x\tan(\alpha) + h$$

d. En déduire la vitesse initiale v_0 du javelot ayant permis le record mondial de javelot féminin.

Exercice 12 : Chandelle au rugby

Un joueur de rugby réalise une chandelle. Il communique au ballon une vitesse $\vec{v}_0$ formant un angle α avec l'horizontale. À $t = 0$ s, le ballon se trouve à une hauteur h au-dessus du sol.Un de ses coéquipiers arrive derrière lui et le dépasse au moment où il frappe le ballon, afin d'essayer de le récupérer.

a. Faire un schéma représentant la situation.

b. Établir les équations du mouvement du ballon.

c. Calculer la durée écoulée avant que le ballon ne touche le sol.

d. Déterminer alors la distance D à parcourir du coéquipier pour récupérer le ballon. On supposera qu'il le récupère juste avant qu'il ne touche le sol.

Données :

— Vitesse initiale : $v_0 = 8{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

— Angle de tir : $\alpha = 50°$

— Intensité de pesanteur : $g = 9{,}81\ \text{N}\cdot\text{kg}^{-1}$

— Hauteur du ballon au moment du tir : $h = 1{,}0$ m