Solutions des exercices

Correction de l'exercice 1.

a. Pour déterminer la trajectoire du point M, il faut éliminer le temps en déterminant une relation entre x, y et z. Par exemple, on exprime t en fonction de x : $t = x - 1$ que l'on remplace dans l'expression de y. On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{l} y = 3(x-1)-2 \\ z = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 3x-5 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

La trajectoire du point M est donc une droite d'équation $y = 3x-5$ dans le plan d'altitude 2

b. Pour déterminer la distance OM, il faut calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ à la date $t = 3$ s. On trouve alors M(4;7;2), d'où :

$$\mathrm{OM} = \sqrt{4^2+7^2+2^2} = \sqrt{69} \simeq 8,31 \text{ m}$$

✌

Correction de l'exercice 2.

a. On dérive les coordonnées du point M en fonction du temps, on obtient alors :

$$\vec{v} = (4t-3;3;0)$$

b. Pour déterminer la vitesse du point M à l'intant $t = 5$ s, il faut calculer la norme du vecteur vitesse à l'instant $t = 5$ s

$$v(5) = \sqrt{17^2+3^2+0^2} = \sqrt{298} \simeq 17,26 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

✌

Correction de l'exercice 3.

Il faut dériver deux fois les coordonnées du point M, pour obtenir le vecteur accélération

$$\vec{a} = (4;0;0) \quad \text{soit} \quad a = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

✌

Correction de l'exercice 4.

a. On détermine les coordonnées du point M aux instants $t = 0$ et $t = 2$ s

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = (-2;1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}(2) = (6;1)$$

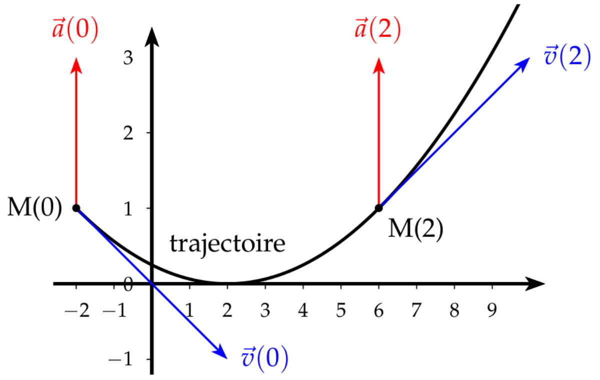
b. Pour déterminer l'accélération à l'instant $t = 10$ s, il faut dériver deux fois le vecteur position :

$$\vec{v} = (4;2t-2) \quad \text{et} \quad \vec{a} = (0;2)$$

L'accélération est donc constante donc $a(10) = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

c. Pour déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire, il faut éliminer t des équations horaires. De l'expression de $x(t)$, on a : $t = \frac{x+2}{4}$ que l'on remplace dans l'expression de $y(t)$ en remarquant que :

$$\begin{aligned} t^2 - 2t + 1 &= (t-1)^2 \\ y &= \left(\frac{x+2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{x+2-4}{4}\right)^2 \\ &= \frac{(x-2)^2}{16} = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

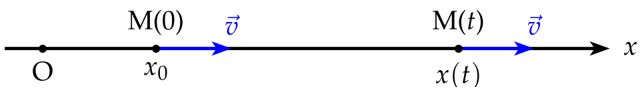


La trajectoire est donc une parabole de sommet S(2;0). Pour connaître le sens du parcours il suffit de repérer les points $M(0)$ et $M(2)$.

✌

Correction de l'exercice 5.

Si le mobile M($x(t)$;0;0) se déplace sur l'axe Ox, on a alors le schéma suivant :



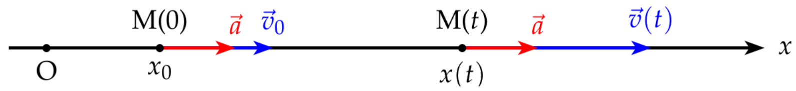
Le vecteur vitesse est alors constant : $\vec{v}$ = Cte car sa norme et son sont constants (trajectoire rectiligne). Le vecteur accélération $\vec{a}$ est donc nul $\vec{a} = \overrightarrow{0}$. Si à $t = 0$ le mobile se trouve à l'abscisse x_0 et en appelant v l'intensité de la vitesse, on obtient l'équation horaire suivante :

$$x(t) = vt + x_0$$

✌

Correction de l'exercice 6.

a. Si le mobile M($x(t)$;0;0) se déplace sur l'axe Ox, on a alors le schéma suivant :



Le vecteur accélération est alors constant : $\vec{a}$ = Cte car sa norme et son sent constants (trajectoire rectiligne). Pour trouver l'équation horaire, il faut intégrer deux fois le vecteur accélération

$$a_x(t) = a \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = at + v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Remarque : v_0 et x_0 sont les constantes d'intégration.

b. Comme le mobile M est immobile en O à $t = 0$ s, alors les constantes d'intégration sont nulles : $v_0 = 0$ m.s^{-1} et $x_0 = 0$ m. On a alors l'équation horaire suivante :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 = 2t^2$$

Le mobile aura parcouru la distance $x(5)$ à l'instant $t = 5$ s, soit :

$$x(5) = 2 \times 25 = 50 \text{ m}$$

✌

Correction de l'exercice 7.

a. $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = -2kt + v_0$
Cette vitesse varie, la vitesse au moment du choc varie (en norme et donc vectoriellement).

b. À $t = 0$ s, $v_x(0) = v_0$: v_0 est donc la vitesse initiale de la voiture.

$$v_x(0) = v_0 = \frac{64}{3,6} = 18\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

c. $a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}(t) = -2k$

Ainsi, la norme de l'accélération est $a(t) = 2k$.

d. (a) À l'instant t_1, la vitesse est nulle : $-2kt_1 + v_0 = 0$ d'où

$$t_1 = \frac{v_0}{2k}$$

(b) À l'instant t_1, $x(t_1) = L$, soit

$$x(t_1) = -k{t_1}^2 + v_0 t_1 = L$$

Or, $t_1 = \frac{v_0}{2k}$, soit

$$-k\left(\frac{v_0}{2k}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{2k} = L$$

d'où

$$-\frac{{v_0}^2}{4k} + \frac{{v_0}^2}{2k} = L$$

puis

$$\frac{v_0^2}{4k} = L$$

On en déduit que

$$k = \frac{{v_0}^2}{4L}$$

(c) Comme la norme de l'accélération est $a(t) = 2k$, elle vaut :

$$a = \frac{{v_0}^2}{2L} = \frac{18^2}{2\times 50\times 10^{-2}} = 3,2\times 10^2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},\ \text{soit } a(t) = 33\ \mathrm{g}.$$

(d) Si $L = 100$ cm, $a(t) = \frac{{v_0}^2}{2L} = 1,6\times 10^2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, soit $a(t) = 17$ g.

Si le véhicule se déforme plus, l'accélération subie par la voiture (et ses passagers) est plus faible. Il faut donc des voitures qui se déforment énormément lors d'un choc pour obtenir les voitures les plus sûres.

✌

Correction de l'exercice 8.

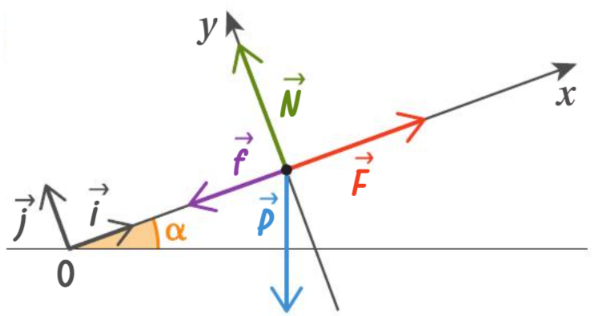
a. Le système est soumis à :

— son poids $\vec{P}$, vertical et orienté vers le bas, de norme $P = mg$;

— la réaction normale du support $\vec{N}$, perpendiculaire au plan et orientée vers le haut ;

— la tension du fil $\vec{F}$, parallèle au support et orientée vers le haut de la pente, de norme $F = 100$ N ;

— la force de frottement du support $\vec{f}$, parallèle au support, dans le sens opposé à celui du mouvement donc vers le bas.



b.

c. Le mouvement du bloc est rectiligne et uniforme. D'après la première loi de Newton, la somme vectorielle des forces appliquées au système est nulle :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} + \vec{N} = \vec{0}$$

On projette chaque force sur les axes $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Leurs coordonnées sont :

$$\vec{f}\begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{N}\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} \quad \vec{P}\begin{pmatrix} -P\sin\alpha \\ -P\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Selon l'axe ($0x$), la première loi de Newton devient :

$$-f + F - P\sin\alpha = 0 \text{ soit } f = F - P\sin\alpha$$

Selon l'axe ($0y$), la première loi de Newton devient :

$$N - P\cos\alpha = 0 \text{ soit } N = P\cos\alpha$$

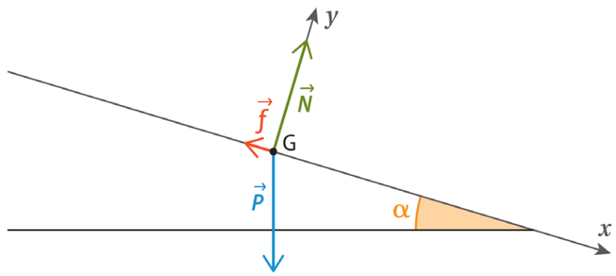
Numériquement, les normes des forces valent :

$$\begin{aligned}
&P = mg = 10,0\times 9,81 = 98,1 \text{ N}\\
&F = 100 \text{ N}\\
&f = F - P\sin\alpha = 100 - 98,1\times\sin\left(20,0^\circ\right) = 66,4 \text{ N}\\
&N = P\cos\alpha = 98,1\times\cos\left(20,0^\circ\right) = 92,2 \text{ N}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9.

a. (a) La voiture est soumise :

- à son poids $\vec{P}$, dirigé selon l'axe vertical et orienté vers le bas, de norme $P = mg = 1,23\times 10^4$ N;
- à la réaction normale du sol $\vec{N}$, dirigée selon (Oy) et orientée vers le haut;
- à la force de frottement $\vec{f}$, dirigée selon (Ox) et orientée vers le haut de la pente.



(b) La voiture est immobile donc d'après la première loi de Newton, on peut écrire :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = \vec{0}$$

On projette selon l'axe (Ox) : $-f + P\sin\alpha = 0$. On en déduit :

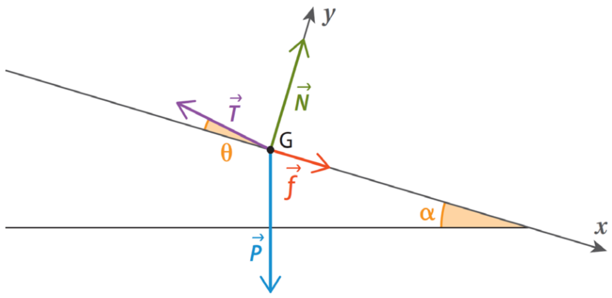
$$\begin{aligned}
&f = P\sin\alpha = mg\sin\alpha = 1250\times 9,81\times\sin\left(16,7^\circ\right)\\
&f = 3,52\times 10^3 \text{ N}
\end{aligned}$$

On projette selon l'axe (Oy) :$N - P\cos\alpha = 0$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
&N = P\cos\alpha = mg\cos\alpha = 1250\times 9,81\times\cos\left(16,7^\circ\right)\\
&N = 1,17\times 10^4 \text{ N}
\end{aligned}$$

b. La voiture est désormais soumise :

- à son poids $\vec{P}$, dirigé selon l'axe vertical et orienté vers le bas, de norme $P = mg = 1,23\times 10^4$ N; - à la réaction normale du sol $\vec{N}$, dirigée selon (Oy) et orientée vers le haut;
- à la force de frottement $\vec{f}$, dirigée selon ($0x$) et orientée vers le bas de la pente;
- à la force de tension du câble $\vec{T}$, dirigée selon l'axe du câble formant un angle θ avec l'axe (Ox) et orientée vers le haut de la pente.



La voiture est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme donc d'après la première loi de Newton, on peut écrire :

$$\vec{P}+\vec{N}+\vec{f}+\vec{T}=\vec{0}$$

On projette selon l'axe $(0x)$: $\quad f+P\sin\alpha-T\cos\theta=0$.
On en déduit :

$$f=T\cos\theta-mg\sin\alpha$$
$$f=6,60\times10^{3}\times\cos\left(10,0^{\circ}\right)-1250\times9,81\times\sin\left(16,7^{\circ}\right)$$
$$f=2,98\times10^{3}\ \mathrm{N}$$

On projette selon l'axe $(0y)$:

$$N+T\sin\theta-P\cos\alpha=0$$

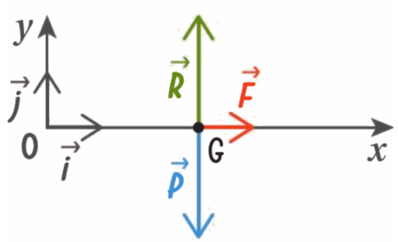
On en déduit :

$$N=mg\cos\alpha-T\sin\theta$$
$$N=1250\times9,81\times\cos\left(16,7^{\circ}\right)-6,60\times10^{3}\times\sin\left(10,0^{\circ}\right)$$
$$N=1,06\times10^{4}\ \mathrm{N}$$

Correction de l'exercice 10.

a. Le système est soumis à :
- son poids $\vec{P}$, vertical et orienté vers le bas, de norme
$$P=mg$$
- la réaction du support $\vec{R}$, verticale et orientée vers le haut ;
- la force de tension du câble $\vec{F}$, parallèle au sol et orientée du système vers le câble, de norme $F=1,2\times10^{2}$ N.

b.



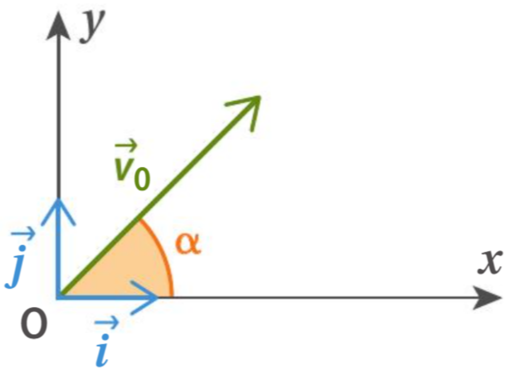
c. On applique la deuxième loi de Newton au système {traîneau + femme} :
$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m\vec{a}$$
Selon l'axe vertical, les forces sont de somme nulle puisque le traîneau a un mouvement horizontal :
$$\vec{P}+\vec{R}=\vec{0}$$
On a donc $\vec{F}=m\vec{a}$ soit $F=ma_x$ en projection le long de $\vec{i}$ Ainsi,
$$a_x=\frac{F}{m}=\frac{1,2\times10^{2}}{2,0\times10^{2}}=6,0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$
. La coordonnée verticale de l'accélération étant nulle, soit $a_y=0$, la norme de l'accélération est ici égale à la valeur de sa coordonnée horizontale $a=a_x=6,0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

d. $\vec{a}$ est constant : le mouvement est uniformément accéléré.

Correction de l'exercice 11.

a. Voir le schéma ci-dessous.

Les coordonnées de la vitesse initiale sont : $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$



b. Voir le cours pour les détails.

Les équations horaires de la vitesse sont :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\alpha) \\ v_y(t) = -g\,t + v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$$

Et celles de la position, compte tenu de la position initiale $(0; h)$, sont :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)\,t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g\,t^2 + v_0 \sin(\alpha)\,t + h \end{cases}$$

c. La date t à laquelle le système se trouve à l'abscisse x est

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

.

Ainsi :

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} + x \tan(\alpha) + h$$

d. Le javelot touche le sol au moment où $y = 0$.

À ce moment-là, l'abscisse est égale à la portée du tir $x = L$. Cherchons v_0 :

$$0 = -\frac{1}{2} g \frac{L^2}{{v_0}^2 \cos^2(\alpha)} + L \tan(\alpha) + h$$

donne, après calculs :

$$v_0 = \frac{L}{\cos(\alpha)} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{g}{L \tan(\alpha) + h}} = 26{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Correction de l'exercice 12.

a.

b. La seule force qui s'exerce sur le ballon est le poids $\vec{P}$. D'après la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} = -g \cdot \vec{j}$$

En intégrant et en tenant compte de la vitesse initiale $\vec{v}_0$:

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}_{(0,\vec{i},\vec{j})}$$

Par intégration, on a :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + h \end{cases}$$

c. Le ballon touche le sol pour $y\left(t_{\text{sol}}\right) = 0$ m. L'équation précédente prend la forme d'une équation du second degré :

$$-\frac{1}{2} g \cdot t_{\text{sol}}^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t_{\text{sol}} + h = 0$$

La seule solution possible physiquement est $t_{\text{sol}} = 1,4$ s.

d.

$$D = x\left(t_{\text{sol}}\right)$$
$$D = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t_{\text{sol}}$$
$$\text{AN} : D = 8,0 \times \cos(50) \times 1,4 = 7,2 \text{ m}$$

✌