

La fonction exponentielle

Vincent LE GRUIEC

21 janvier 2024

La fonction exponentielle

Définition - Théorème

Il existe une *unique* fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que

$$\begin{cases} f' &= f \\ f(0) &= 1 \end{cases}$$

Cette fonction est appelée la *fonction exponentielle* et on la note \exp .

Théorème fondamental de la fonction exponentielle

Théorème.

Pour tout x et y dans \mathbb{R} ,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Théorème fondamental de la fonction exponentielle

Théorème.

Pour tout x et y dans \mathbb{R} ,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

→ Cette relation nous rappelle les règles de calculs sur les puissances, ce qui nous amène à introduire la *notation* suivante :

Notation.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$\exp(x) := e^x \quad \text{où} \quad e = \exp(1)$$

Propriété de la fonction exponentielle avec la notation

Proposition.

Pour tout x et y dans \mathbb{R} ,

a. $e^{x+y} = e^x \times e^y$

b. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

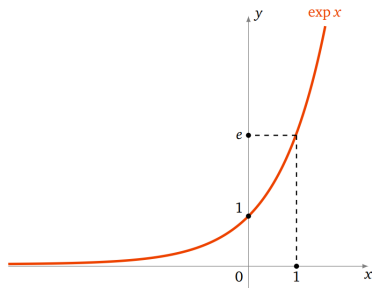
c. $e^{x \times y} = (e^x)^y$

→ C'est « naturel », on fait comme avec les puissances.

Comportement et représentation graphique

Proposition.

La fonction exponentielle est strictement positive et croissante sur \mathbb{R} .



$$e \simeq 2,72$$

$$e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Exercice de manipulation

Exercice.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$

b) $e^{2x} \times e$

c) $\frac{e^{4x}}{e^{-x}}$

d) $\left(\frac{1}{e^x}\right)^2$

e) $\frac{e^{3x} \times e^{-x}}{e^x}$

f) $e^x \times (e^{-2x})^3$

Exercice de manipulation

Exercice.

Résous dans \mathbb{R} les équations suivantes.

a) $e^{2x+4} = 1$

b) $e^{-3x+7} = e^{-2}$

c) $e^{x^2} - e = 0$

Exercice.

Pour $k > 0$, étudier les variations des fonctions f_k et g_k définies sur \mathbb{R} par

$$f_k : t \longmapsto e^{kt} \quad \text{et} \quad g_k : t \longmapsto e^{-kt}$$

On rappelle que si une fonction f est dérivable alors la fonction

$$h : x \longmapsto f(ax + b)$$

est également dérivable et on a

$$h' : x \longmapsto a \times f'(ax + b)$$

(dérivée d'une fonction composée)

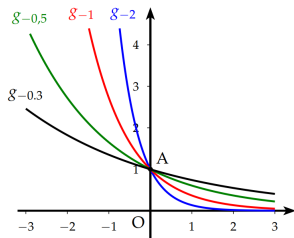
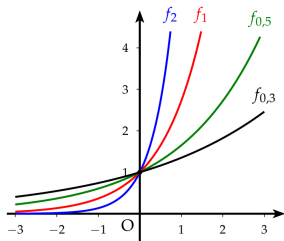
Croissance et décroissance exponentielle

Définition

Soit $k > 0$ un réel. On définit les fonctions f_k et g_k par

$$f_k : t \mapsto e^{kt} \quad \text{et} \quad g_k : t \mapsto e^{-kt}$$

- Les fonctions f_k correspondent à une croissance exponentielle.
- Les fonctions g_k correspondent à une décroissance exponentielle ou atténuation.



Croissance exponentielle - Illustration

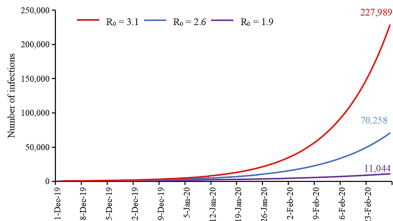
Ce sont des phénomènes de la forme

$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

où $N(t)$ est le nombre d'individus au temps t , $N(0)$ le nombre d'individus au temps 0, r le taux de croissance intrinsèque.

Exemple.

Très présent en biologie : augmentation du nombre de micro-organismes, nombre de malades, etc.



Croissance exponentielle - Illustration

Ce sont des phénomènes de la forme

$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

où $N(t)$ est le nombre d'individus au temps t , $N(0)$ le nombre d'individus au temps 0, r le taux de croissance intrinsèque.

Exemple.

En physique : phénomènes de réaction en chaîne, réaction nucléaire en chaîne.

En économie : La croissance d'une dette en raison des intérêts composés.

Plus généralement : toute modélisation discrète par une suite géométrique : $u_n = u_0 q^n = u_0 e^{\ln(q)n}$.

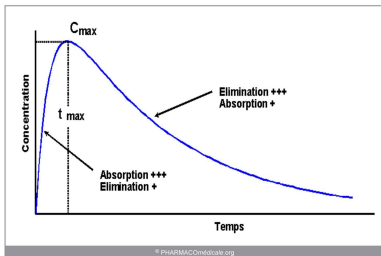
Décroissance exponentielle - Illustration

Ce sont des phénomènes d'amortissement du premier ordre (voir *équations différentielles*).

$$N(t) = N(0)e^{-rt}$$

Exemple :

En biologie : modéliser l'élimination d'un produit dans le sang, au cours du temps.



Décroissance exponentielle - Illustration

Phénomènes d'amortissement du premier ordre (voir *équations différentielles*).

$$N(t) = N(0)e^{-rt}$$

Exemple :

Illustre beaucoup de phénomènes **physiques** au cours du temps. Exemples, le suivi de la diminution

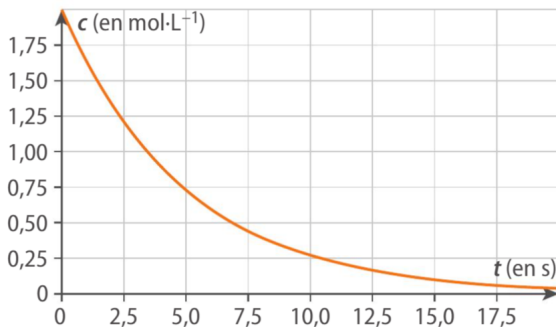
- a. de la température d'un corps au refroidissement, sans changement de phase.
- b. de l'amplitude lors de l'oscillations harmoniques amorties d'un pendule.
- c. de l'intensité des ondes électromagnétiques traversant un milieu absorbant.
- d. de l'intensité d'émission de la luminescence après excitation.

Décroissance exponentielle - Illustration

Exemple.

c. de la vitesse des réactions chimiques du premier ordre.

$$[A](t) = [A]_i \times e^{-kt}$$

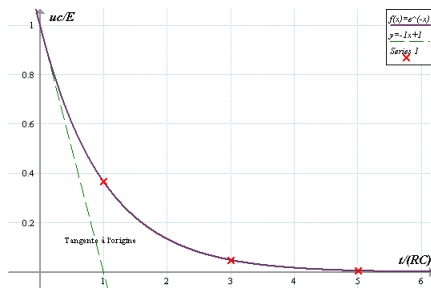


Décroissance exponentielle - Illustration

Exemple.

e. Intensité de décharge d'un condensateur d'un circuit RC.

$$I(t) = \frac{E}{R} \times e^{-\frac{t}{RC}}$$



Décroissance exponentielle - Illustration

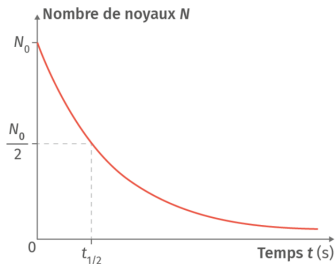
Exemple.

f. Nombre de noyaux dans une désintégration radioactive de constante radioactive λ

$$N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}$$

$N(t)$: nombre de noyaux radioactifs à l'instant t ; N_0 : nombre de noyaux radioactifs à l'instant initial.

λ : constante radioactive (ou constant de désintégration) des noyaux étudiés.



Étude d'une décroissance radioactive

Partie A.

On étudie un échantillon de noyaux radioactifs. Ceux-ci ont la particularité de se désintégrer au cours du temps, en produisant de l'énergie. La loi de désintégration radioactive est de la forme :

$$f(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

- $f(t)$ représente le nombre de noyaux restant à l'instant t , N_0 est le nombre de noyaux présents à l'instant initial et λ est la constante de désintégration de l'espèce radioactive (on peut considérer λ comme constante en première approximation).

A ▶ On s'intéresse à un amas de noyaux de Cobalt ^{60}Co .

On suppose que la loi de désintégration radioactive est la suivante :


$$f(t) = 3,2 \times 10^{12} \times e^{-\frac{1}{5,2714}t}$$

- t est exprimé en années.

1. Représenter la courbe de la fonction f à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. On pourra modifier les échelles sur les axes pour faire apparaître la courbe.

2. Déterminer graphiquement au bout de combien d'années le nombre de noyaux de Cobalt aura été divisé par deux.

Remarque Ce temps noté $t_{1/2}$ est appelé demi-vie de cette espèce radioactive.

3. Écrire un programme **Python**  qui permette de renvoyer une valeur approchée de la demi-vie d'une espèce radioactive lorsque l'on donne en entrée sa constante de désintégration λ .

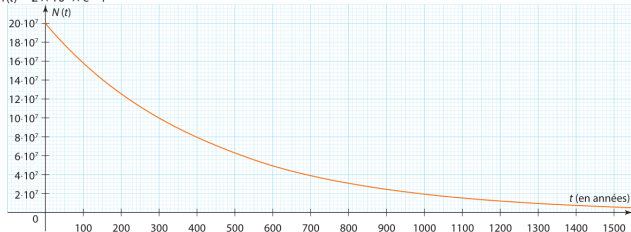
Étude d'une décroissance radioactive

Partie B.

B ► Les constantes de désintégration (pour t en années (a), donc en a^{-1} pour les constantes de désintégrations) de différentes espèces radioactives sont données dans le tableau ci-dessous.

Espèce radioactive	Krypton	Hydrogène	Strontium	Césium	Américium
Constante de désintégration λ (en a^{-1})	0,0929368	0,08116883	0,03474635	0,03325574	0,00231374

Dans le repère suivant, la loi de désintégration d'un amas de noyaux d'une espèce radioactive inconnue, de la forme $f(t) = 2 \times 10^8 \times e^{-\lambda t}$,



1. Déterminer $f'(0)$ en fonction de λ .
2. Lire une valeur approchée de $f'(0)$.
3. En déduire l'espèce radioactive de l'amas parmi celles du tableau.
4. Déterminer la demi-vie de cette espèce radioactive.
5. Déterminer au bout de combien de temps l'amas de noyaux aura été divisé par huit.

Questions supplémentaires :

a. Montrer que pour tout instant $t > 0$, si $N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}$ alors

$$N(t + t_{1/2}) = \frac{N(t)}{2}$$

b. Montrer que pour tout entier k (pour tout réel k même)

$$N(k \times t_{1/2}) = \frac{N_0}{2^k}$$

c. Retrouve le résultat de la dernière question par le calcul.