Le logarithme pour l'étude de l'évolution temporelle de la radioactivité

1 Loi de décroissance radioactive

On rappelle la loi de décroissance radioactive :

$$\boxed{N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}}$$

avec $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t, N_0 le nombre de noyaux à l'instant initial et λ la constante radioactive des noyaux. Ce résultat sera démontré dans le chapitre *équations différentielles*.

Exercice 1 : expression de la demi-vie

Définition : la *demi-vie* est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs initialement présents soient désintégrés. On la note $t_{1/2}$.

a. Donner l'équation vérifiée par $t_{1/2}$.

b. Résoudre cette équation pour donner une expression de $t_{1/2}$.

À retenir

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}} \quad \text{et donc} \quad \boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}}$$

Exercice 2 : résultat autour de la demi-vie

a. Démontrer que la demi-vie ne dépend pas de l'instant initial t_0 choisi.

b. Montrer que pour tout entier k, $N(k \times t_{1/2}) = \frac{N_0}{2^k}$

À retenir, pour tout instant t et tout entier k,

$$\boxed{N(t + t_{1/2}) = \frac{N(t)}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{N(t + k \times t_{1/2}) = \frac{N(t)}{2^k}}$$

Exercice 3

Le prométhium 144 est un noyau radioactif avec pour demi-vie $t_{1/2} = 1,0$ a.

a. On a un échantillon contenant $4,0 \times 10^{10}$ noyaux. Calculer le nombre de noyaux non désintégrés au bout de 0,5 a, 1,0 a, 3,0 a et 4,0 a.

b. Trace la courbe $N(t) = f(t)$.

c. Détermine de deux manières différentes la date à laquelle il ne reste plus que $1,5 \times 10^{10}$ noyaux.

Exercice 4 : activité d'un noyau radioactif

Définition : l'activité instantanée, ou juste *activité*, d'un échantillon radioactif est le nombre de désintégrations à chaque instant t, par définition on a donc

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt}$$

On admet (pour le moment) que

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \times N(t)$$

a. Montre que l'activité d'un échantillon de noyaux radioactifs est *proportionnelle* au nombre de noyaux $N(t)$.

b. Montre que $A(t)$ vérifie la loi de décroissance

$$A(t) = A_0 \times e^{-\lambda t}$$

2 Méthodes de datation

Pour tout instant t,

$$\boxed{N(t) = N_0 \times \mathrm{e}^{-\lambda t}} \quad \text{et} \quad \boxed{A(t) = A_0 \times \mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

Explication : la radioactivité est un phénomène naturel omniprésent. Cette activité est par exemple présente dans les roches et les organismes. Prenons l'exemple d'un organisme. Il arrive pendant la vie d'un organisme que le nombre de noyaux radioactifs ou l'activité soit égale à une constante pour certains isotopes (connaissance de N_0 ou A_0). Seulement à la mort de l'organisme, ces noyaux vont suivre une décroissance selon les lois rappelées ci-dessus. Une mesure de l'activité permet donc de retrouver depuis quand l'organisme est mort.

Exercice 5 : datation au carbone 14 - exemple classique

Un bébé mammouth congelé dans un remarquable état de conservation a été retrouvé en Sibérie dans la péninsule de Yamal en mai 2007. L'analyse des poils par datation au carbone 14 a montré que la fraction de noyaux N de carbone 14 par rapport au nombre initial est de 0,175.

Question : calculer l'âge du mammouth sachant que la demi-vie du carbone 14 est $t_{1/2}$= 5 730 ans.

Exercice 6 : datation en fonction du nombre de noyaux

Démontre la formule générale de datation suivante :

$$t = -\frac{1}{\lambda} \times \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = -\frac{t_{1/2}}{\ln(2)} \times \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)$$

Exercice 7 : datation en fonction de l'activité

Démontre la formule générale de datation suivante :

$$t = -\frac{1}{\lambda} \times \ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right) = -\frac{t_{1/2}}{\ln(2)} \times \ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right)$$

Remarque : les formules des deux derniers exercices ne sont pas à apprendre par cœur. Il faut savoir les retrouver.

Exercice 8 : datation d'une carotte de glace

La datation des calottes glaciaires au chlore 36 permet d'étudier les évolutions du climat de la terre.

L'isotope du chlore 36 a une demi-vie $t_{1/2} = 3{,}01 \times 10^5$ ans. Dans l'atmosphère et les eaux de surface, le chlore 36 est constamment renouvelé et sa teneur est constante. Dans la glace, à plusieurs mètres sous la surface, il n'est pas renouvelé. La proportion de chlore 36 diminue donc au cours du temps.

Des mesures sur un échantillon de glace prélevé en profondeur montrent que 30% du chlore 36 a disparu par rapport à un échantillon de surface. On note N_0 le nombre d'atomes de chlore 36 dans l'échantillon au moment où la neige est tombée et $N(t)$ le nombre dans l'échantillon d'âge t.

a. Exprimer $N(t)$ en fonction de N_0 et $t_{1/2}$.

b. En déduire t en fonction des autres grandeurs.

c. Que vaut le rapport de $N(t)$ par N_0 ? En déduire l'âge de l'échantillon.