Fonctions logarithmes (népérien et autres)

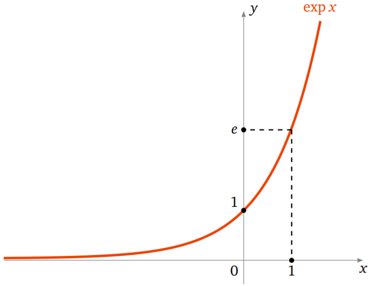
Vincent LE GRUIEC

28 janvier 2024

Comportement et représentation graphique de exp

Proposition.

La fonction exponentielle est strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$.



$\mathrm{e} \simeq 2,72$ $\qquad$ $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{} 0$ $\qquad$ $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} +\infty$

La fonction logarithme népérien - construction

La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est *continue*, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle parcourt toutes les valeurs de $]0, +\infty[$.

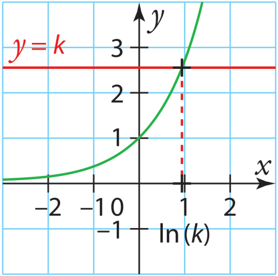
La fonction logarithme népérien - construction

La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est *continue*, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle parcourt toutes les valeurs de $]0, +\infty[$.

Si on fixe $k \in]0, +\infty[$, l'équation

$$\mathrm{e}^x = k$$

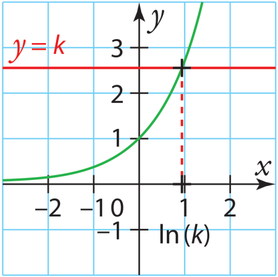
a une *unique* solution dans $\mathbb{R}$:



Définition.

On appelle fonction logarithme népérien, noté ln, la fonction définie sur $]0,+\infty[$ qui à tout nombre réel strictement positif x associe l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^y = x$ d'inconnue y. On définit ainsi $y = \ln(x)$.

$$\ln : \left| \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{la solution } y \text{ de } \mathrm{e}^y = x \end{array} \right.$$



Relation exp et ln

Propriété

Par définition,

a. Pour tout $x > 0$,

$$\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\ln(\mathrm{e}^{x}) = x$$

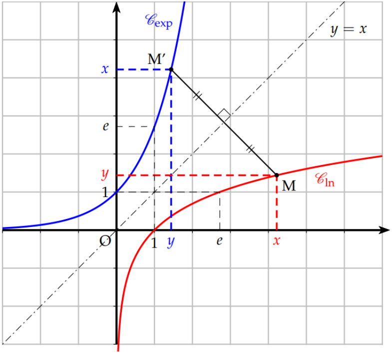
c.

$$\ln(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(\mathrm{e}) = 1$$

Conséquence graphique

$$x > 0, \quad e^{\ln(x)} = x \qquad \text{et} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$$

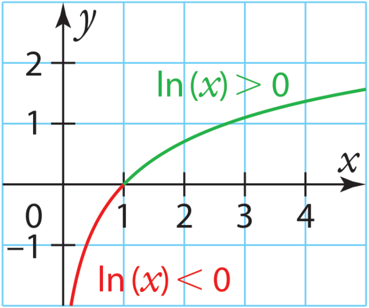
$\longrightarrow$ On dit que exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
Leurs courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice :



Comportement

Proposition.

La fonction logarithme népérien est croissante sur $]0, +\infty[$. Elle est s'annule en 1. Elle est donc négative avant et positive après.



Relation fonctionnelle

Théorème

Pour tout x et y dans $]0,+\infty[$,

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$\longrightarrow$ Transformation d'un produit en somme. À titre de comparaison, exp transforme une somme en produit

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

Conséquences

Proposition

Pour tout x et y dans $]0, +\infty[$,

a.

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

b. En particulier,

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

c.

$$\ln(x^y) = y\ln(x)$$

Exercice.

Exprimer en fonction de $\ln(5)$.

a) $\ln 25 + \ln \sqrt{125}$

b) $\ln 35 - \ln 175$

c) $\ln \dfrac{e^4}{25}$

d) $e^{-\ln 5} - \ln(5e)$

Exercices de manipulation

Exercice.

Résoudre.

a) $\ln(x) = -1$ **b)** $e^{2x} = -1$

c) $\ln(4 - 2x) > 1$ **d)** $e^{x+1} \geqslant 2$

Exercices de manipulation

Exercice.

Résoudre.

a) $\ln(x+1) = \ln(-x)$ **b)** $\ln(x^2 - 1) \leqslant \ln(5)$

Exercices de manipulation

Exercice.

Résoudre.

a) $\left(\dfrac{5}{9}\right)^n \leqslant 0{,}01$ avec $n \in \mathbb{N}$

b) $2^n - 7 \times 2^{n-1} > -3$