

# Solides de l'espace

M. LE GRUIEC

15 octobre 2024

## 1 Révisions sur les aires

## 2 Notion de patron

## 3 Notion de prisme droit

3.1 Définition et exemples

3.2 Volume d'un prisme droit

## 4 Le cylindre de révolution

## 5 Étude d'un nouveau polyèdre : la pyramide

5.1 Définition

5.2 Patron de la pyramide

5.3 Volume de la pyramide

## 6 Étude du cône de révolution

6.1 Définition

6.2 Relation entre angle et arc de cercle

6.3 Patron du cône de révolution

6.4 Volume du cône de révolution

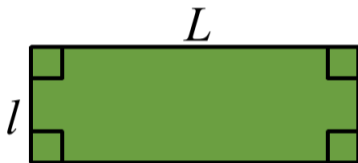
## 7 Repérage

7.1 Repérage dans le plan (Rappel)

7.2 Repérage dans l'espace

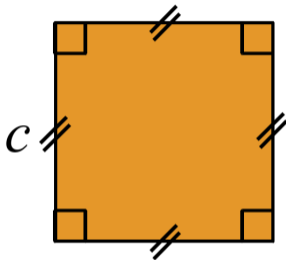
# 1. Révisions sur les aires

► L'aire du rectangle



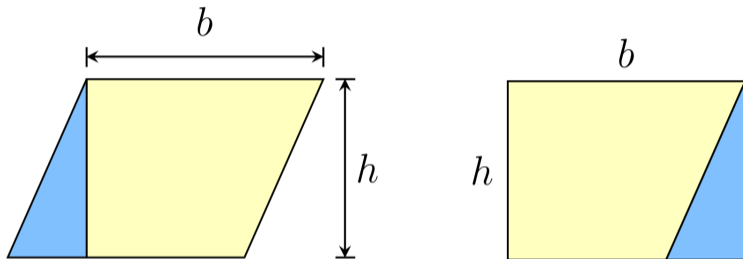
$$\mathcal{A} = L \times l = \text{longueur} \times \text{largeur}$$

► L'aire du carré (cas particulier du rectangle)



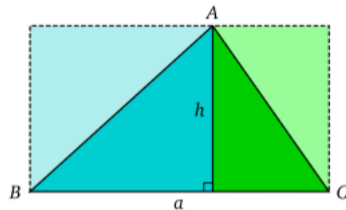
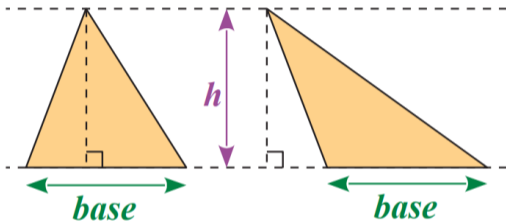
$$\mathcal{A} = c \times c = \text{côté} \times \text{côté}$$

► L'aire du parallélogramme (se déduit de l'aire du rectangle)



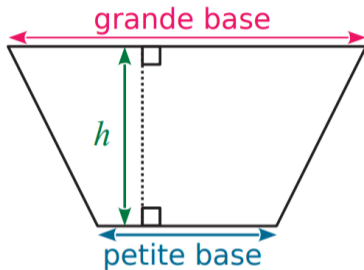
$$\mathcal{A} = b \times h = \text{base} \times \text{hauteur}$$

► L'aire du triangle (se déduit de l'aire du rectangle)



$$\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times h}{2} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

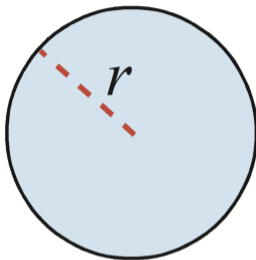
- L'aire du trapèze (se déduit de l'aire du triangle)



$$\mathcal{A} = \frac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times h}{2}$$



► L'aire du disque



$$A = \pi \times r^2$$

avec  $\pi \simeq 3,14$

## 2. Notion de patron

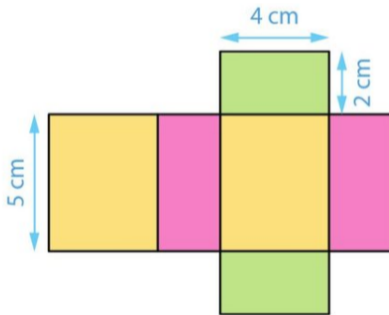
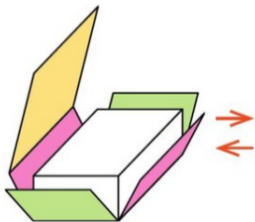
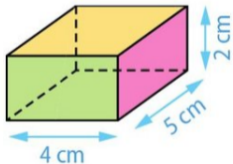
## Définition

Un **patron** d'un solide est une *figure plane* en grandeur réelle qui, après pliage sur certains segments, permet de construire le solide.

## Exemple

La figure de droite représente le patron d'un pavé droit.

Vue en perspective  
cavalière

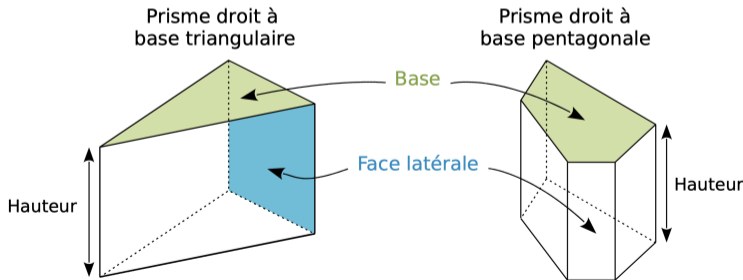


# 3. Notion de prisme droit

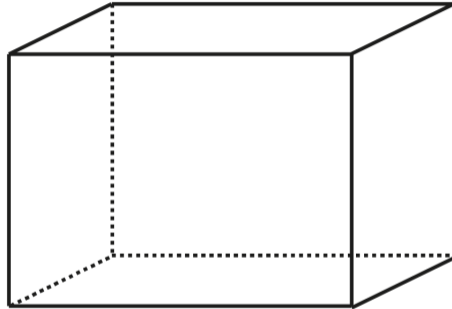
## Définition

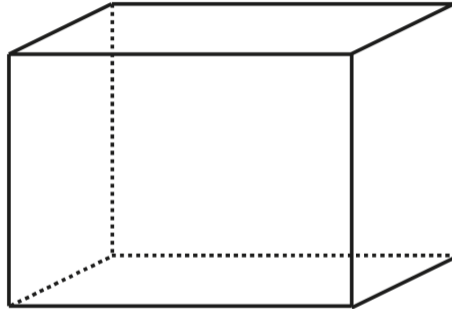
Un **prisme droit** est un solide formé de deux bases polygonales superposables, parallèles, reliées par des faces latérales rectangulaires.

## Exemples



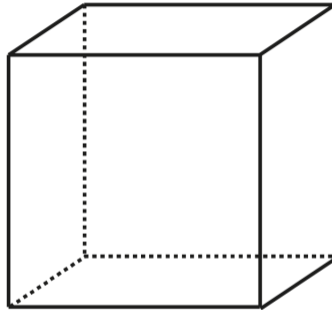
# Prisme droit ou pas prisme droit ?



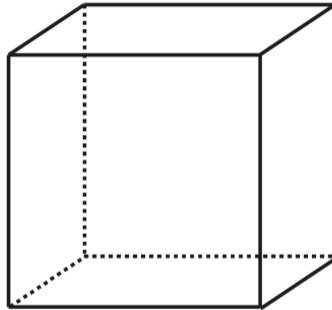


*Pavé droit : prisme droit à base rectangulaire*

# Prisme droit ou pas prisme droit ?

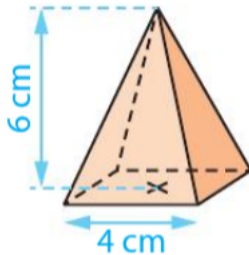


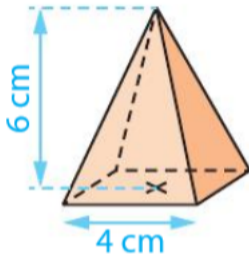




*Cube : prisme droit à base carré*

# Prisme droit ou pas prisme droit ?



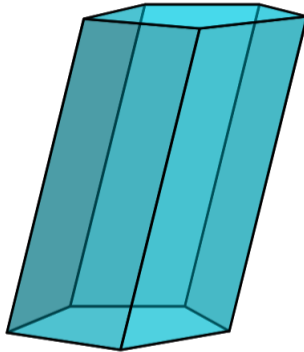


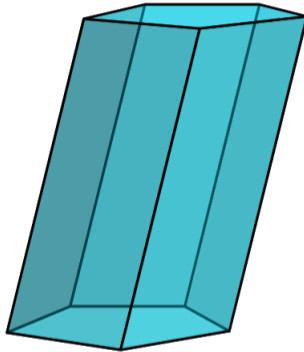
**Non**

Voici deux raisons qui font que le polyèdre (solide à faces polygonales) ci-dessus n'est pas un prisme droit :

- ▶ Il n'y a pas deux bases polygonales superposables.
- ▶ Les faces latérales sont des triangles et non des rectangles.

# Prisme *droit* ou pas prisme *droit*?

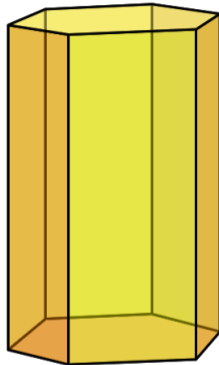


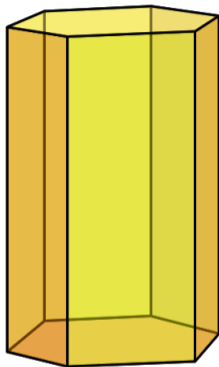


C'est un prisme, mais *pas* un prisme *droit*.

- ▶ Les faces latérales sont des parallélogrammes non rectangles.

# Prisme droit ou pas prisme droit ?





C'est un prisme droit *droit* cette fois-ci.

- Les faces latérales sont rectangulaires.

### Proposition

Le volume d'un prisme est le produit de l'aire de la base polygonale et de la hauteur.

$$V_{\text{prisme}} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times \text{hauteur}$$

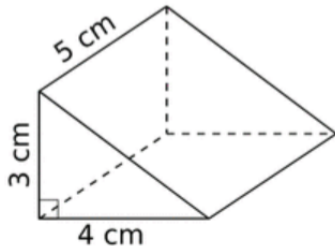


### Proposition

Le volume d'un prisme est le produit de l'aire de la base polygonale et de la hauteur.

$$\mathcal{V}_{\text{prisme}} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times \text{hauteur}$$

### Exemple

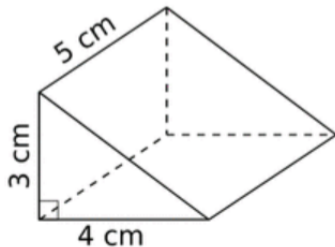


### Proposition

Le volume d'un prisme est le produit de l'aire de la base polygonale et de la hauteur.

$$\mathcal{V}_{\text{prisme}} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times \text{hauteur}$$

### Exemple



- ▶ La base est un triangle rectangle d'aire  $\mathcal{A} = (4 \times 3) \div 2 = 12 \div 2 = 6 \text{ cm}^2$
- ▶ Ainsi, le volume du prisme est

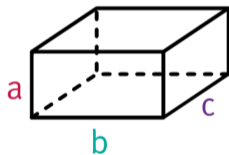
$$\mathcal{V} = 6 \times 5 = 30 \text{ cm}^3$$

## Proposition

Le volume d'un pavé droit avec pour base un rectangle de côté  $a$  et  $b$  et de hauteur  $c$  est donné par

$$\mathcal{V} = a \times b \times c$$

- ▶ C'est simplement un cas particulier de la proposition précédente.

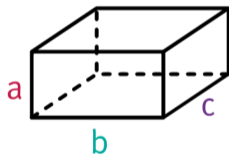


## Proposition

Le volume d'un pavé droit avec pour base un rectangle de côté  $a$  et  $b$  et de hauteur  $c$  est donné par

$$\mathcal{V} = a \times b \times c$$

► C'est simplement un cas particulier de la proposition précédente.



## Exemple

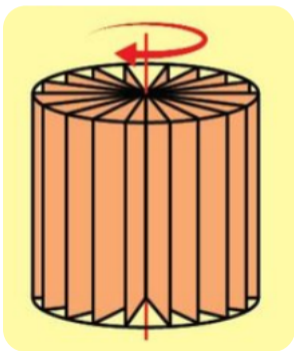
Soit un pavé droit de longueur  $L = 10$  cm, de largeur  $\ell = 5$  cm et de hauteur  $h = 2$  cm. Le volume de ce pavé droit est :

$$\mathcal{V} = L \times \ell \times h = 10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^3$$

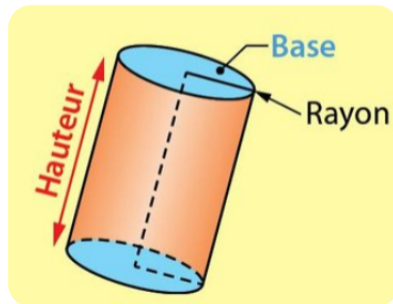
# 4. Le cylindre de révolution

## Définition

Un *cylindre de révolution* est un solide obtenu en faisant tourner un rectangle autour de l'un de ses côtés.



## ► Vocabulaires



## Proposition

Le volume  $\mathcal{V}$  d'un cylindre de révolution de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  est donné par la formule :

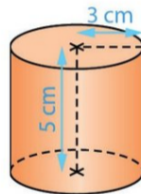
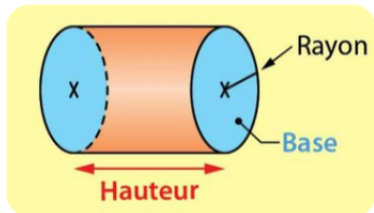
$$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur} = \pi \times r^2 \times h$$

## Proposition

Le volume  $\mathcal{V}$  d'un cylindre de révolution de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur} = \pi \times r^2 \times h$$

## Exemple



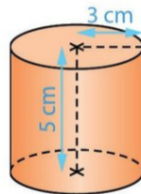
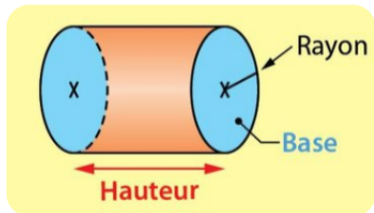


## Proposition

Le volume  $\mathcal{V}$  d'un cylindre de révolution de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \text{aire de la base} \times \text{hauteur} = \pi \times r^2 \times h$$

## Exemple



Son volume est donné par :

$$\mathcal{V} = \pi \times 3 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$$

$$\mathcal{V} = 45 \times \pi \text{ cm}^3 \approx 141 \text{ cm}^3$$

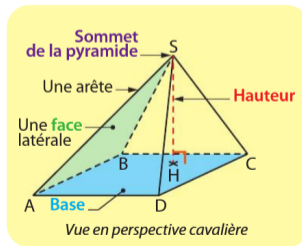
## 5. Étude d'un nouveau polyèdre : la pyramide

## Définition

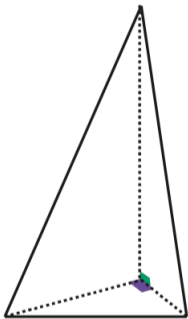
Une *pyramide* de sommet  $S$  est un solide dont :

- ▶ La *base* est un polygone.
- ▶ Les faces latérales sont des triangles de sommet  $S$ .

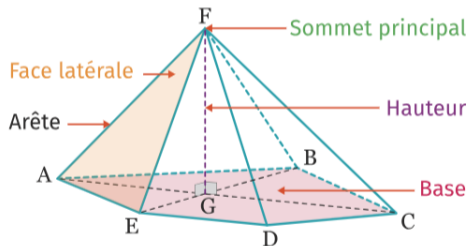
La *hauteur* de la pyramide de sommet  $S$  est le segment  $[SH]$  perpendiculaire au plan de la base, où  $H$  est un point de ce plan.



**Remarque :** Une pyramide n'a pas forcément une base carrée comme en Égypte !

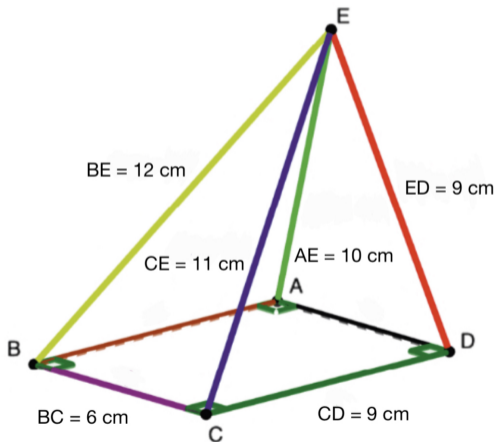


**Exemple :** Pyramide non régulière.



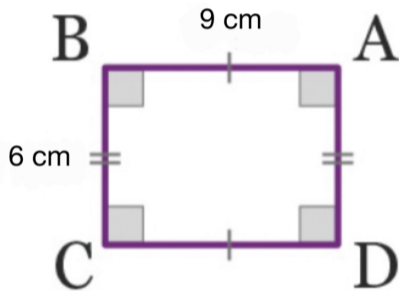
### Exemple

Construis le patron de la pyramide (*non régulière*) ci-dessous.



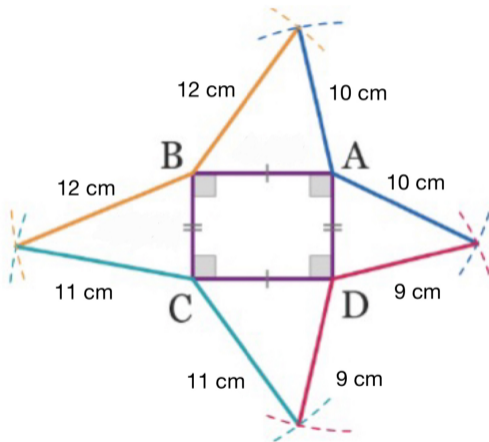
## Étape 1 :

On commence par construire la base à l'aide d'une règle et d'une équerre.



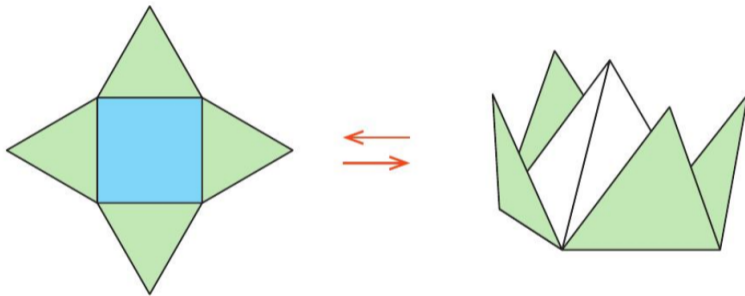
## Étape 2 :

On construit ensuite les faces à l'aide d'une règle et d'un compas.



### Étape 3 :

Rajoute des ailes pour les points de collage puis plis ta pyramide.





### Proposition

Le volume  $\mathcal{V}$  d'une pyramide est donné par la formule

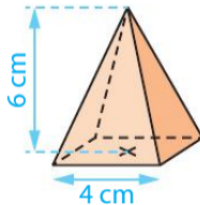
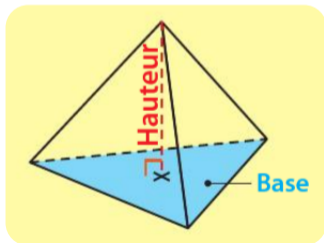
$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

### Proposition

Le volume  $\mathcal{V}$  d'une pyramide est donné par la formule

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

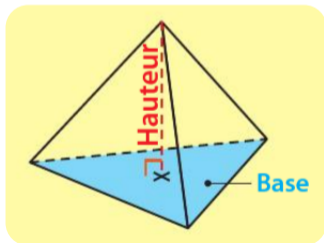
Exemple :



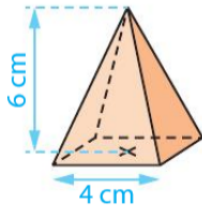
### Proposition

Le volume  $\mathcal{V}$  d'une pyramide est donné par la formule

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$



Exemple :

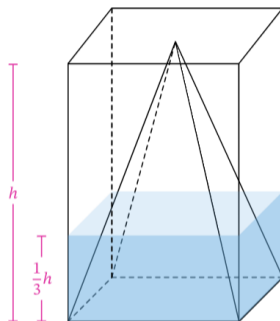


La base est carré, donc l'aire de la base est

$$\mathcal{A} = 4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$$

Par suite, le volume de la pyramide est

$$\mathcal{V} = \frac{16 \times 6}{3} = \frac{96}{3} = 32 \text{ cm}^3$$

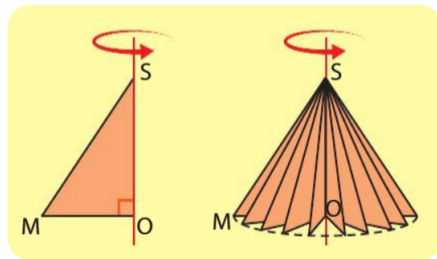


- Imaginons que nous pouvons complètement remplir une pyramide avec, par exemple, de l'eau. Si nous versons cette eau dans un prisme de même base et de même hauteur que la pyramide, nous remarquons que le niveau d'eau est exactement à un tiers de la hauteur du prisme.

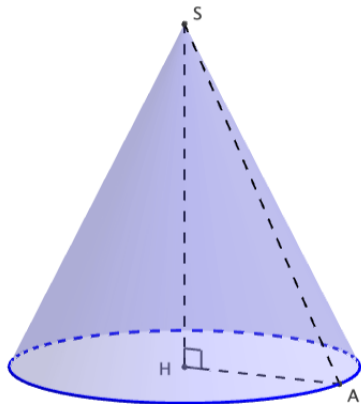
# 6. Étude du cône de révolution

## Définition

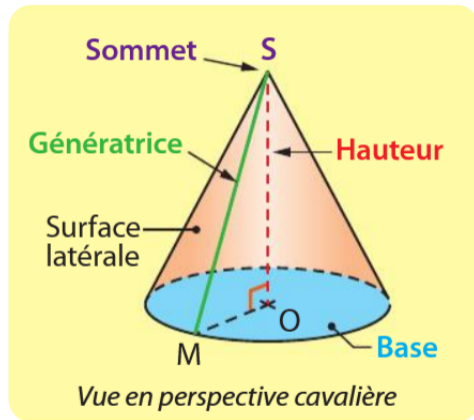
Un **cône de révolution** est un solide obtenu par rotation d'un triangle rectangle autour d'un côté de l'angle droit.



## ► Exemple

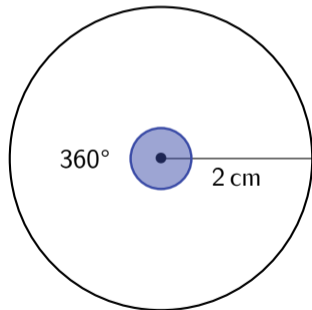


## ► Vocabulaires



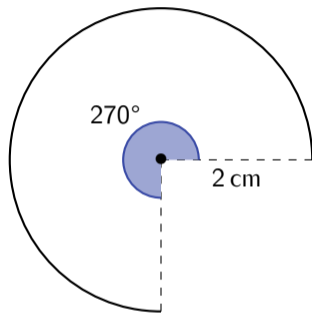
- ▶ Si on considère un cercle de rayon 2 cm, l'angle au centre est de  $360^\circ$  et le périmètre est

$$\mathcal{P} = 4\pi \text{ cm}$$





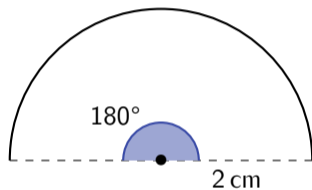
- ▶ Si maintenant on prend l'arc de cercle porté par le cercle précédent avec un angle au centre égal au trois-quarts de l'angle plein,  $\frac{3}{4} \times 360^\circ = 270^\circ$ , on obtient :



- ▶ On remarque que lorsqu'on prend les trois-quarts de l'angle au centre, on prend également les trois-quarts du périmètre du cercle. La longueur de l'arc est donc

$$\mathcal{P}_a = \frac{3}{4} \times 4\pi \text{ cm} = 3\pi \text{ cm}$$

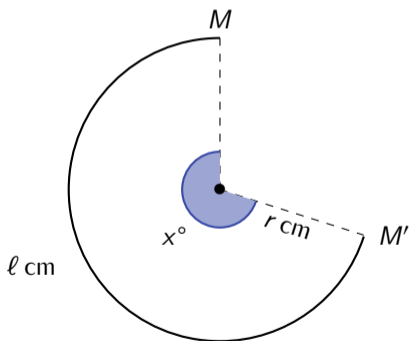
De même, on aurait pu prendre l'arc de cercle avec la moitié de l'angle plein au centre.  
Dans ce cas-là l'arc de cercle mesure également la moitié du cercle correspondant :



$$\mathcal{P}_a = \frac{1}{2} \times 4\pi \text{ cm} = 2\pi \text{ cm}$$

## Proposition

La longueur d'un arc de cercle est *proportionnelle* à la mesure de son angle.

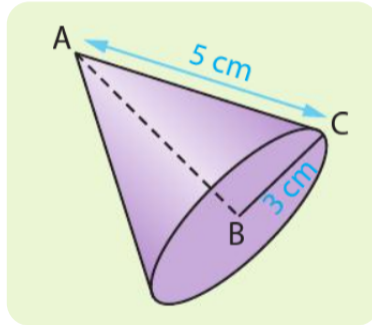


Mesure de l'angle (en $^\circ$ )	360	$x$
Longueur de l'arc (en cm)	$2\pi r$	$\ell$

$$x = \frac{360}{2\pi r} \times \ell$$

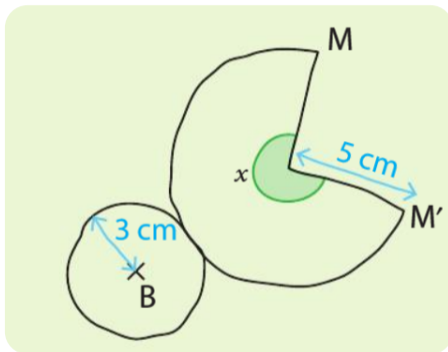
### Exemple

Construis le patron du cône de révolution ci-dessous.



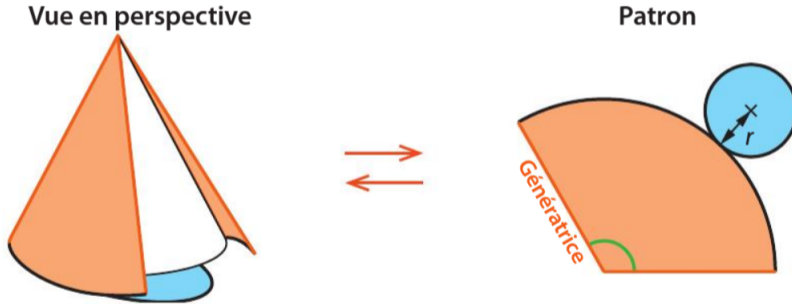
## Étape 1

On commence par faire le patron à main levée. L'allure du patron est :



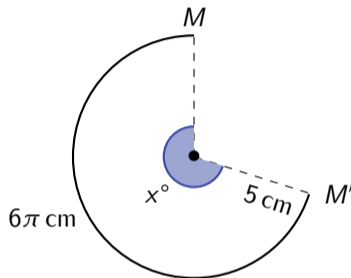
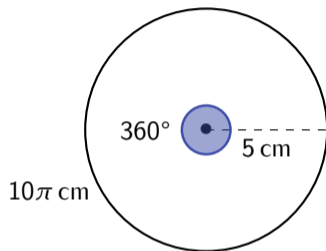
## Étape 2

Lorsqu'on va plier notre patron, l'arc de cercle entre M et M' doit épouser parfaitement le bord du disque qui sert de base. Par conséquent, on doit trouver  $x$  de sorte que la longueur de l'arc entre M et M' soit égale au périmètre de la base.



Le périmètre de la base est

$$\mathcal{P} = 2 \times 3 \times \pi = 6\pi \text{ cm.}$$



Mesure de l'angle (en °)	360	x
Longueur de l'arc (en cm)	10π	6π

### Étape 3

On calcule la taille du secteur angulaire et on finalise le patron avec le bon angle trouvé.

Mesure de l'angle (en °)	360	$x$
Longueur de l'arc (en cm)	$10\pi$	$6\pi$

Le coefficient de proportionnalité pour passer de la ligne du bas à celle du haut est

$$c = \frac{360}{10\pi}$$

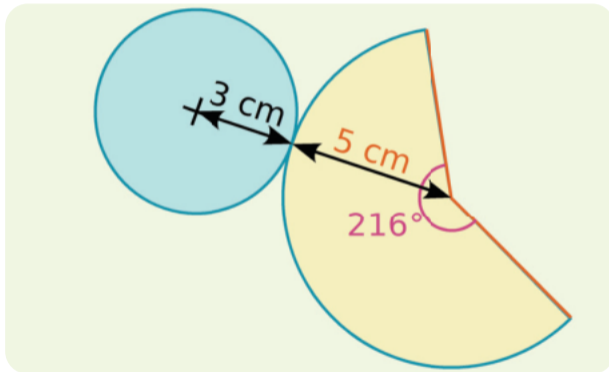
Par conséquent,

$$x = \frac{360}{10\pi} \times 6\pi = 6 \times 36 = 216^\circ.$$



## Étape 4

On trace le patron.



### Proposition

Le volume  $\mathcal{V}$  d'un cône de révolution est donné par la formule

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi \times r^2 \times \text{hauteur}}{3}$$

où  $r$  est le rayon du disque qui sert de base.

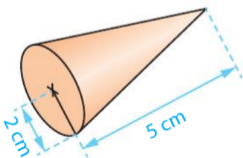
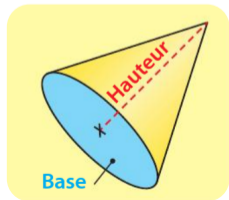
### Proposition

Le volume  $\mathcal{V}$  d'un cône de révolution est donné par la formule

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi \times r^2 \times \text{hauteur}}{3}$$

où  $r$  est le rayon du disque qui sert de base.

### Exemple



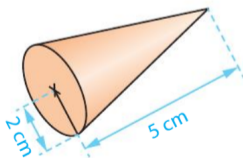
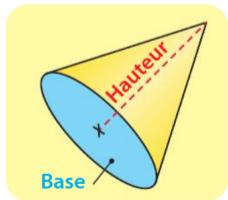
### Proposition

Le volume  $\mathcal{V}$  d'un cône de révolution est donné par la formule

$$\mathcal{V} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\pi \times r^2 \times \text{hauteur}}{3}$$

où  $r$  est le rayon du disque qui sert de base.

### Exemple

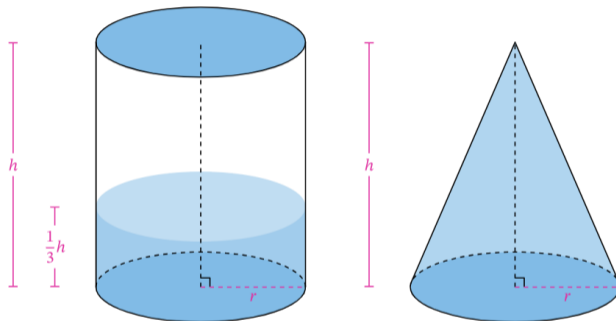


L'aire de la base est l'aire du disque de rayon 2 cm :

$$\mathcal{A} = \pi \times 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2$$

Par suite, le volume du cône est

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi \times 5}{3} = \frac{20\pi}{3} \simeq 21 \text{ cm}^3$$



- Imaginons qu'on remplisse un cône entièrement, par exemple avec de l'eau. Si on verse cette eau dans un cylindre de même base et de même hauteur que le cône, on constate que le niveau d'eau arrive exactement au tiers de la hauteur du cylindre.

# 7. Repérage

## Proposition

Dans un repère du plan, chaque point est repéré par **deux nombres relatifs** : ses **coordonnées**. La première coordonnée est l'**abscisse**, la seconde l'**ordonnée**.

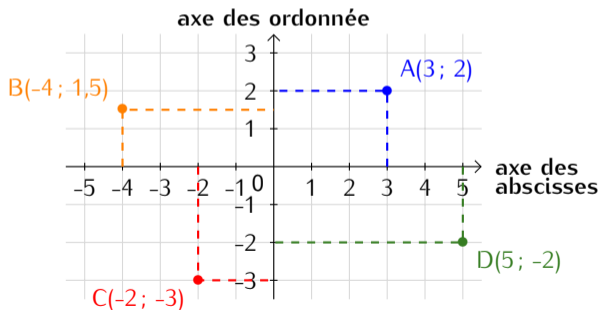
► On les note (**abscisse** ; **ordonnée**).

## Proposition

Dans un repère du plan, chaque point est repéré par **deux nombres relatifs** : ses **coordonnées**. La première coordonnée est l'**abscisse**, la seconde l'**ordonnée**.

► On les note (**abscisse** ; **ordonnée**).

## Exemples





### Proposition

Dans l'espace, il est possible de repérer un point **par trois coordonnées**.

- ▶ Les deux premières correspondent à la position au sol du point.
- ▶ La dernière correspond à l'**altitude** du point.

On note  $M(\text{abscisse} ; \text{ordonnée} ; \text{altitude})$  les coordonnées d'un point  $M$

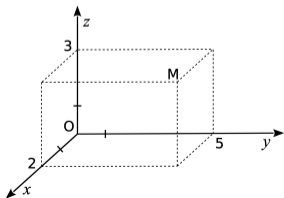
### Proposition

Dans l'espace, il est possible de repérer un point **par trois coordonnées**.

- ▶ Les deux premières correspondent à la position au sol du point.
- ▶ La dernière correspond à l'**altitude** du point.

On note  $M(\text{abscisse}; \text{ordonnée}; \text{altitude})$  les coordonnées d'un point  $M$

### Exemple



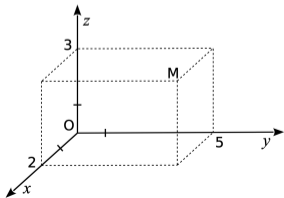
### Proposition

Dans l'espace, il est possible de repérer un point **par trois coordonnées**.

- ▶ Les deux premières correspondent à la position au sol du point.
- ▶ La dernière correspond à l'**altitude** du point.

On note  $M(\text{abscisse}; \text{ordonnée}; \text{altitude})$  les coordonnées d'un point  $M$

### Exemple



- ▶ La première coordonnée au sol se lit selon l'axe ( $Ox$ ) : **abscisse = 2**
- ▶ La seconde coordonnée au sol se lit selon l'axe ( $Oy$ ) : **ordonnée = 5**
- ▶ Enfin, l'altitude se lit selon l'axe ( $Oz$ ) : **altitude = 3**

Conclusion :  $M(2; 5; 3)$