Multiplication et division de fractions

M. LE GRUIEC

30 janvier 2025

1. Produits en croix

1. Produits en croix

Théorème ♡

Soient a, b, c et d des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

- **Si** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ***alors*** $a \times d = b \times c$
- **Réciproquement, si** $a \times d = b \times c$ ***alors*** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Méthode

Pour montrer que deux fractions sont équivalentes ou non, on peut regarder si l'égalité des produits en croix est vérifiée ou non.

Méthode

Pour montrer que deux fractions sont équivalentes ou non, on peut regarder si l'égalité des produits en croix est vérifiée ou non.

Exemples

- On veut savoir si les fractions $\dfrac{20}{35}$ et $\dfrac{24}{42}$ sont égales.

Méthode

Pour montrer que deux fractions sont équivalentes ou non, on peut regarder si l'égalité des produits en croix est vérifiée ou non.

Exemples

- On veut savoir si les fractions $\frac{20}{35}$ et $\frac{24}{42}$ sont égales. On calcule les « produits en croix » en réalisant **deux calculs séparés avant de les comparer** : $20 \times 42 = 840$ et $24 \times 35 = 840$. Les produits en croix sont égaux, donc les fractions sont égales.

Méthode

Pour montrer que deux fractions sont équivalentes ou non, on peut regarder si l'égalité des produits en croix est vérifiée ou non.

Exemples

- On veut savoir si les fractions $\frac{20}{35}$ et $\frac{24}{42}$ sont égales. On calcule les « produits en croix » en réalisant **deux calculs séparés avant de les comparer** : $20 \times 42 = 840$ et $24 \times 35 = 840$. Les produits en croix sont égaux, donc les fractions sont égales.
- On veut savoir si les fractions $\frac{6}{5}$ et $\frac{13}{10}$ sont égales.

Méthode

Pour montrer que deux fractions sont équivalentes ou non, on peut regarder si l'égalité des produits en croix est vérifiée ou non.

Exemples

- On veut savoir si les fractions $\dfrac{20}{35}$ et $\dfrac{24}{42}$ sont égales. On calcule les « produits en croix » en réalisant **deux calculs séparés avant de les comparer** : $20 \times 42 = 840$ et $24 \times 35 = 840$. Les produits en croix sont égaux, donc les fractions sont égales.
- On veut savoir si les fractions $\dfrac{6}{5}$ et $\dfrac{13}{10}$ sont égales. On calcule les « produits en croix » en réalisant **deux calculs séparés avant de les comparer** : $6 \times 10 = 60$ et $5 \times 13 = 65$. Les produits en croix ne sont **pas** égaux, donc les fractions ne sont **pas** égales.

Exercice

Pour chaque égalité, trouver la valeur de x en justifiant par un calcul.

- $\dfrac{1{,}2}{6} = \dfrac{x}{7}$
- $\dfrac{63}{x} = \dfrac{-819}{195}$

Exercice

Pour chaque égalité, trouver la valeur de x en justifiant par un calcul.

- $\dfrac{1,2}{6} = \dfrac{x}{7}$
- $\dfrac{63}{x} = \dfrac{-819}{195}$

Correction

« Deux quotients sont égaux si et seulement si leurs produits en croix sont égaux. »

- $1,2 \times 7 = x \times 6$ donc $8,4 = x \times 6$.

On trouve $x = \dfrac{8,4}{6} = 1,4$.

- $x \times (-819) = 195 \times 63$ donc $x \times (-819) = 12285$.

On trouve $x = \dfrac{12285}{-819} = -15$.

2. Multiplier des fractions

Proposition

Soient a, b , c et d des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$. On a

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Proposition

Soient a, b , c et d des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$. On a

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Remarques

- La multiplication de deux fractions est simple à effectuer : **pas** de mise au même dénominateur.
- **Important :** on a le cas particulier suivant,

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{k}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{k \times a}{1 \times b} = \frac{k \times a}{b}$$

Exemples

Calculer les produits suivants :

- $A = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{5}$
- $B = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{-4}{5}$
- $C = \dfrac{5}{6} \times 3$

Exemples

Calculer les produits suivants :

- $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$
- $B = \frac{2}{3} \times \frac{-4}{5}$
- $C = \frac{5}{6} \times 3$

Correction

- $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}$
- $B = \frac{2}{3} \times \frac{-4}{5} = \frac{2 \times (-4)}{3 \times 5} = \frac{-8}{15}$
- $C = \frac{5}{6} \times 3 = \frac{5}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{5 \times 3}{6 \times 1} = \frac{15}{6}$

Exemples

Calculer les produits suivants : ▶ $D = \dfrac{32}{75} \times \dfrac{55}{24}$ ▶ $E = \dfrac{32}{25} \times \dfrac{15}{28}$ ▶ $F = \dfrac{49}{-27} \times \dfrac{-8}{21} \times \dfrac{63}{35}$

Exemples

Calculer les produits suivants : ▶ $D = \dfrac{32}{75} \times \dfrac{55}{24}$ ▶ $E = \dfrac{32}{25} \times \dfrac{15}{28}$ ▶ $F = \dfrac{49}{-27} \times \dfrac{-8}{21} \times \dfrac{63}{35}$

Méthode

Pour faciliter les calculs, il est parfois astucieux de décomposer les facteurs au numérateur et au dénominateur pour simplifier avant d'effectuer les multiplications.

Correction

- $D = \dfrac{32}{75} \times \dfrac{55}{24} = \dfrac{32 \times 55}{75 \times 24} = \dfrac{8 \times 4 \times 5 \times 11}{5 \times 15 \times 8 \times 3} = \dfrac{4 \times 11}{15 \times 3} = \dfrac{44}{45}$

- $E = \dfrac{32}{25} \times \dfrac{15}{28} = \dfrac{32 \times 15}{25 \times 28} = \dfrac{4 \times 8 \times 5 \times 3}{5 \times 5 \times 4 \times 7} = \dfrac{24}{35}$

- $\dfrac{49}{-27} \times \dfrac{-8}{21} \times \dfrac{63}{35} = +\dfrac{49 \times 8 \times 63}{27 \times 21 \times 35} = \dfrac{7 \times 7 \times 8 \times 9 \times 7}{3 \times 9 \times 3 \times 7 \times 5 \times 7} = \dfrac{8 \times 7}{3 \times 3 \times 5} = \dfrac{56}{45}$

3. Proportion et fractions

Proposition

Prendre une proportion d'une quantité revient à multiplier cette quantité par la proportion.

3. Proportion et fractions

Proposition

Prendre une proportion d'une quantité revient à multiplier cette quantité par la proportion.

Exemples

- Que représentent les 2 tiers (2/3) d'une bouteille de 75 cl ?
- Que représente 7 huitièmes (7/8) de 64 g ?

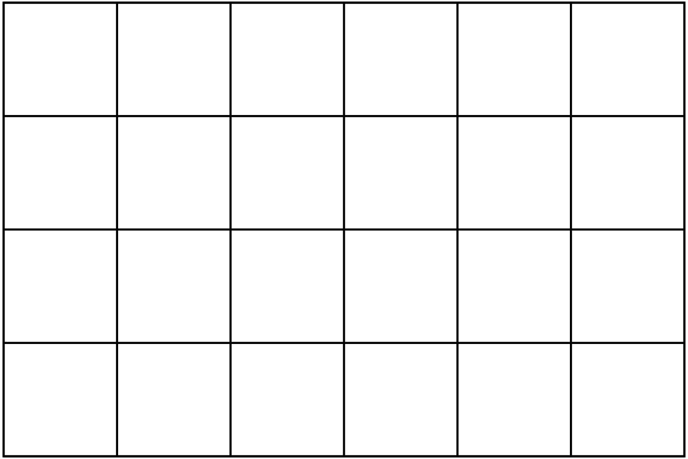
Activité : une proportion d'une proportion

Activité

Pour un devoir de français, Arthur fait des recherches sur Internet. Il a consacré 5/6 de son temps de connexion à faire des recherches sur des auteurs anglophones et un quart de ce temps de recherche pour se renseigner sur les auteurs de romans fantastiques.

1. Reproduire le rectangle de la diapo suivante représentant le temps total de connexion.
2. Hachurer en bleu le temps de connexion utilisé pour la recherche sur les auteurs anglophones, puis en rouge le temps utilisé pour la recherche sur les auteurs de romans fantastiques.
3. Par lecture sur le dessin, quelle est la proportion du temps total de connexion passé pour la recherche d'auteurs anglophones de romans fantastiques ?
4. Quel calcul permettrait d'obtenir ce résultat : $\frac{5}{6} + \frac{1}{4}$; $\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{6} \times \frac{1}{4}$?

Bilan : Quelle opération doit-on utiliser pour calculer une fraction d'une fraction ?



Proposition

Calculer une fraction d'une fraction revient à multiplier ces fractions entre elles.

Proposition

Calculer une fraction d'une fraction revient à multiplier ces fractions entre elles.

Exemples

Alice découpe une part de tarte qui correspond à 2/5 de la tarte. De cette part elle en mange 3/7. Quelle proportion de la tarte initiale Alice a-t-elle mangée ?

Proposition

Calculer une fraction d'une fraction revient à multiplier ces fractions entre elles.

Exemples

Alice découpe une part de tarte qui correspond à 2/5 de la tarte. De cette part elle en mange 3/7. Quelle proportion de la tarte initiale Alice a-t-elle mangée ?

Solution

$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$$

Elle a mangé les $\frac{6}{35}$ de la tarte aux pommes.

Exercices

- Dans un paquet de 30 bonbons, les 2/3 sont de couleur jaune et 2/5 des bonbons jaunes sont au citron. Déterminer la proportion de bonbons jaunes au citron sur l'ensemble des bonbons.

- En 2020, pour naviguer sur Internet à partir d'un mobile, 2/7 des Français utilisaient Safari. Un cinquième de ces utilisateurs ont téléchargé la dernière version du navigateur. Quelle est la proportion de Français qui utilisaient la dernière version de Safari ?

4. Diviser par une fraction

Définition

Deux nombres sont *inverses* l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Définition

Deux nombres sont *inverses* l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Exemple

- $2 \times 0{,}5 = 1$ donc 2 et 0,5 sont inverses l'un de l'autre.
- Le nombre 0 n'est pas inversible car $0 \times a = 0$ pour tout nombre a. En fait 0 est le seul nombre non inversible.

Définition

Deux nombres sont *inverses* l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Exemple

- $2 \times 0{,}5 = 1$ donc 2 et 0,5 sont inverses l'un de l'autre.
- Le nombre 0 n'est pas inversible car $0 \times a = 0$ pour tout nombre a. En fait 0 est le seul nombre non inversible.

Proposition

Soient a et b des nombres relatifs **non nuls**.

- Le nombre a est inversible et son inverse est $\frac{1}{a}$.
- L'inverse de $\frac{a}{b}$ est le nombre $\frac{b}{a}$.

Exemples

Pour chacun des nombres suivants, donner son inverse : ▶ $\dfrac{-2}{7}$ ▶ -3 ▶ $\dfrac{5}{9}$ ▶ 0,125

Solution

- L'inverse du nombre $\dfrac{-2}{7}$ est le nombre $\dfrac{7}{-2}$ qui s'écrit également $-\dfrac{7}{2}$.

  En général, on ne laisse jamais de signe $-$ au dénominateur.

- L'inverse de -3 est $\dfrac{1}{-3}$ qu'on écrit $-\dfrac{1}{3}$.
- L'inverse de $\dfrac{5}{9}$ est $\dfrac{9}{5}$.
- Puisque $0{,}125 = \dfrac{1}{8}$, donc l'inverse de 0,125 est 8

Théorème ♡

▶ **Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.**

Autrement dit, par des fractions,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Théorème ♡

▶ **Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse.**

Autrement dit, par des fractions,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Exemples

▶ $\dfrac{-4}{9} \div \dfrac{3}{-2} = \dfrac{\frac{-4}{9}}{\frac{3}{-2}} = \dfrac{-4}{9} \times \dfrac{-2}{3} = \dfrac{-4 \times (-2)}{9 \times 3} = \dfrac{8}{27}$

▶ $\dfrac{5}{3} \div 4 = \dfrac{5}{3} \div \dfrac{4}{1} = \dfrac{5}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{5 \times 1}{3 \times 4} = \dfrac{5}{12}$

Exercice

Réaliser les calculs suivants.

- $6 \div 0{,}5$
- $-\frac{8}{5} \div (-3)$
- $\frac{2}{3} \div \frac{-5}{7}$
- $\frac{-5}{4} \div \frac{10}{7}$

Méthode

- On remplace la division par une multiplication et on inverse la deuxième fraction.
- On calcule le produit, en simplifiant si possible.

Exercice

Réaliser les calculs suivants.

- $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$
- $B = \frac{-5}{8} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)$

Méthode

- On mène les calculs en respectant les priorités :
  1. calculs entre parenthèses
  2. multiplications et divisions
  3. additions et soustractions
- On simplifie au maximum si possible.

Solution

- $6 \div 0{,}5 = \frac{6}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{6}{1} \times \frac{2}{1} = 12$
- $\frac{-8}{5} \div (-3) = \frac{-8}{5} \times \frac{-1}{3} = \frac{8}{15}$
- $\frac{2}{3} \div \frac{-5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{-7}{5} = -\frac{14}{15}$
- $\frac{-5}{4} \div \frac{10}{7} = \frac{-5}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{-5}{4} \times \frac{7}{2 \times 5} = -\frac{7}{8}$

Solution

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \qquad B = \frac{-5}{8} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)$$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{8}{9} \qquad B = -\frac{5}{8} \times \left(\frac{5}{10} + \frac{6}{10}\right)$$

$$A = \frac{1 \times 3}{3 \times 3} + \frac{8}{9} \qquad B = -\frac{5}{8} \times \frac{11}{10}$$

$$A = \frac{3}{9} + \frac{8}{9} \qquad B = -\frac{5}{8} \times \frac{11}{5 \times 2}$$

$$A = \frac{11}{9} \qquad B = -\frac{11}{16}$$