Fractions : comparaison et addition

M. LE GRUIEC

13 septembre 2024

1. Fractions équivalentes

Théorème-Définition ♡

Si on multiplie (ou divise) le numérateur **et** le dénominateur d'une fraction par un même nombre *non nul* alors on obtient une fraction égale.

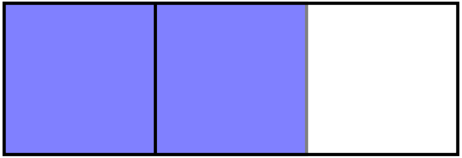
$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

- On parle de ***fractions équivalentes***.

Exemples

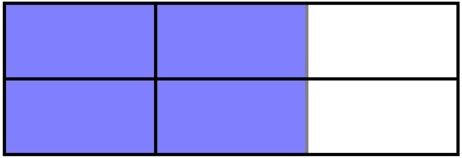
- $\dfrac{5}{3} = \dfrac{5 \times 2}{3 \times 2} = \dfrac{10}{6}$
- $\dfrac{56}{64} = \dfrac{56 \div 8}{64 \div 8} = \dfrac{7}{8}$

Illustation



$\frac{2}{3}$

$=$



$\frac{4}{6}$

Définition

- **Simplifier une fraction**, c'est écrire une fraction qui lui est égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits.
- Une fraction est **irréductible** si on l'a simplifiée au maximum.

Exemples

- On veut simplifier la fraction $\dfrac{63}{75}$.
- On remarque pour commencer que 63 et 75 sont divisibles par 3.
  En effet, $63 = 21 \times 3$ et $75 = 25 \times 3$.
- On peut donc écrire $\dfrac{63}{75} = \dfrac{21 \times 3}{25 \times 3} = \dfrac{21}{25}$.

- On veut la forme irréductible de la fraction $\dfrac{75}{45}$.
- On remarque pour commencer que 75 et 45 sont divisibles par 5.
- On peut donc écrire $\dfrac{75}{45} = \dfrac{15 \times 5}{9 \times 5} = \dfrac{15}{9}$.
- On peut encore simplifier par 3 :

$$\frac{15}{9} = \frac{5 \times 3}{3 \times 3} = \frac{5}{3}$$

2. Comparaison de fractions

Proposition

Soient a, b et c trois nombres relatifs avec $c > 0$.

$$\text{Si} \quad a < b \quad \text{alors} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Méthode

Pour comparer deux fractions, on les met donc sur le même dénominateur positif et on compare ensuite les numérateurs.

Pourquoi ?

C'est comme pour comparer, par exemple, 5 centimètres et 1 mètre. On ne pas conclure que 5 centimètres $>$ 1 mètre sous prétexte que $5 > 1$. On doit convertir dans la même unité, ce qui correspond à mettre sur le même dénominateur. Puisque 1 mètre $=$ 100 centimètres et que $100 > 5$ on peut dire que 1 mètre $>$ 5 centimètres.

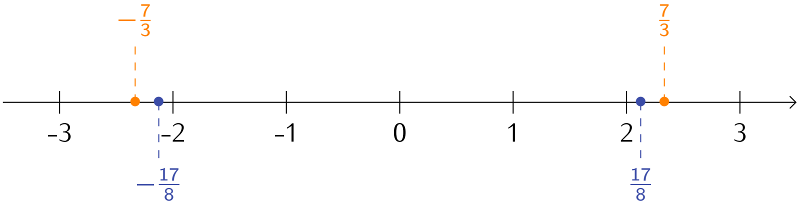
Exemple

- On veut comparer $\frac{17}{8}$ et $\frac{7}{3}$. On commence par mettre sur le même dénominateur positif.

$$\frac{17}{8} = \frac{17 \times 3}{8 \times 3} = \frac{51}{24} \quad \text{et} \quad \frac{7}{3} = \frac{7 \times 8}{3 \times 8} = \frac{56}{24}$$

Puisque $51 < 56$ on peut conclure que $\frac{51}{24} < \frac{56}{24}$ donc $\frac{17}{8} < \frac{7}{3}$.

- De plus, comme $\frac{17}{8} < \frac{7}{3}$, on peut aussi affirmer que $\frac{-17}{8} > \frac{-7}{3}$



3. Additionner et soustraire des fractions

3.1. Cas où les fractions ont même dénominateur

Proposition

Soient a, b et c des nombres relatifs avec $c \neq 0$. On a

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Autrement dit,

- Pour additionner deux fractions, il faut qu'elles soient sur le **même dénominateur** et je peux alors additionner les numérateurs.

Exemples

- $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{5} = \frac{6}{5}$
- $\frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{7-5}{3} = \frac{2}{3}$

3.2. Cas où les dénominateurs sont différents

Exemple

On veut réaliser le calcul suivant :

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{3}$$

Méthode

- Pour additionner deux fractions (ou plus), **il faut toujours qu'elles soient sur le même dénominateur.**
- On peut donc multiplier le numérateur **et** le dénominateur des fractions pour se trouver dans ce cas de figure.

Pourquoi ?

On peut reprendre l'exemple avec 5 centimètres et 1 mètre. On voudrait additionner 5 cm et 1 m. Quel serait le résultat ? On pourrait naïvement calculer 5+1=6, mais quelle serait l'unité de ce résultat ? **Cela n'a pas de sens**. Il faut convertir nos longueurs dans la même unité pour les additionner, ce qui correspond à mettre sur le même dénominateur. Le résultat est donc 5 cm +1 m = 5 cm + 100 cm = 105 cm.

Exemple

On veut réaliser le calcul suivant :

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{3}$$

Correction

- Je commence par chercher un multiple commun à 5 et 3. On trouve de tête que 15 est dans la table de ces deux nombres : $15 = 3 \times 5$
- Je mets ensuite sur le même dénominateur et j'additionne les numérateurs

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{3}=\frac{2\times 3}{5\times 3}+\frac{7\times 5}{3\times 5}=\frac{6}{15}+\frac{35}{15}=\frac{6+35}{15}=\frac{41}{15}$$

D'autres exemples

Exemples

On veut calculer $A = \frac{5}{2} + \frac{2}{3}$.

On écrit les deux fractions avec pour même dénominateur $2 \times 3 = 6$:

$$A = \frac{5}{2} + \frac{2}{3}$$
$$A = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$$
$$A = \frac{15}{6} + \frac{4}{6}$$
$$A = \frac{19}{6}$$

On veut calculer $B = \frac{3}{4} - \frac{11}{6}$.

On écrit les deux fractions avec pour même dénominateur 12 :

$$B = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{11 \times 2}{6 \times 2}$$
$$B = \frac{9}{12} - \frac{22}{12}$$
$$B = \frac{9 - 22}{12}$$
$$B = \frac{-13}{12}$$