

Fractions : comparaison et addition

M. LE GRUIEC

13 septembre 2024

1 Fractions équivalentes

2 Comparaison de fractions

3 Additionner et soustraire des fractions

3.1 Cas où les fractions ont même dénominateur

3.2 Cas où les dénominateurs sont différents

1. Fractions équivalentes

Théorème-Définition ♥

Si on multiplie (ou divise) le numérateur **et** le dénominateur d'une fraction par un même nombre *non nul* alors on obtient une fraction égale.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

► On parle de *fractions équivalentes*.

Théorème-Définition ♥

Si on multiplie (ou divise) le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre *non nul* alors on obtient une fraction égale.

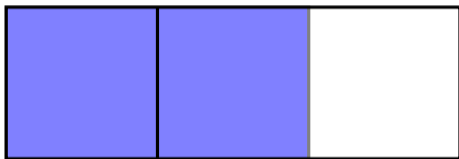
$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

► On parle de *fractions équivalentes*.

Exemples

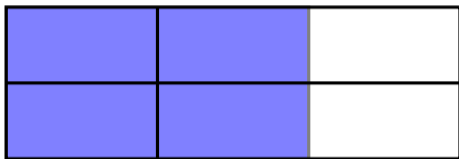
$$\text{► } \frac{5}{3} = \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{10}{6}$$

$$\text{► } \frac{56}{64} = \frac{56 \div 8}{64 \div 8} = \frac{7}{8}$$



$$\frac{2}{3}$$

=



$$\frac{4}{6}$$

Définition

- ▶ **Simplifier une fraction**, c'est écrire une fraction qui lui est égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits.
- ▶ Une fraction est **irréductible** si on l'a simplifiée au maximum.

Définition

- ▶ **Simplifier une fraction**, c'est écrire une fraction qui lui est égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits.
- ▶ Une fraction est **irréductible** si on l'a simplifiée au maximum.

Exemples

- ▶ On veut simplifier la fraction $\frac{63}{75}$.
- ▶ On remarque pour commencer que 63 et 75 sont divisibles par 3.
En effet, $63 = 21 \times 3$ et $75 = 25 \times 3$.
- ▶ On peut donc écrire $\frac{63}{75} = \frac{21 \times 3}{25 \times 3} = \frac{21}{25}$.

Définition

- ▶ **Simplifier une fraction**, c'est écrire une fraction qui lui est égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits.
- ▶ Une fraction est **irréductible** si on l'a simplifiée au maximum.

Exemples

- ▶ On veut simplifier la fraction $\frac{63}{75}$.
- ▶ On remarque pour commencer que 63 et 75 sont divisibles par 3.
En effet, $63 = 21 \times 3$ et $75 = 25 \times 3$.
- ▶ On peut donc écrire $\frac{63}{75} = \frac{21 \times 3}{25 \times 3} = \frac{21}{25}$.

- ▶ On veut la forme irréductible de la fraction $\frac{75}{45}$.
- ▶ On remarque pour commencer que 75 et 45 sont divisibles par 5.

▶ On peut donc écrire $\frac{75}{45} = \frac{15 \times 5}{9 \times 5} = \frac{15}{9}$.

- ▶ On peut encore simplifier par 3 :

$$\frac{15}{9} = \frac{5 \times 3}{3 \times 3} = \frac{5}{3}$$

2. Comparaison de fractions

Proposition

Soient a , b et c trois nombres relatifs avec $c > 0$.

$$\text{Si } a < b \text{ alors } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Proposition

Soient a , b et c trois nombres relatifs avec $c > 0$.

$$\text{Si } a < b \text{ alors } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Méthode

Pour comparer deux fractions, on les met donc sur le même dénominateur positif et on compare ensuite les numérateurs.

Proposition

Soient a , b et c trois nombres relatifs avec $c > 0$.

$$\text{Si } a < b \text{ alors } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

Méthode

Pour comparer deux fractions, on les met donc sur le même dénominateur positif et on compare ensuite les numérateurs.

Pourquoi ?

C'est comme pour comparer, par exemple, 5 centimètres et 1 mètre. On ne peut pas conclure que 5 centimètres $>$ 1 mètre sous prétexte que $5 > 1$. On doit convertir dans la même unité, ce qui correspond à mettre sur le même dénominateur. Puisque 1 mètre = 100 centimètres et que $100 > 5$ on peut dire que 1 mètre $>$ 5 centimètres.

Exemple

► On veut comparer $\frac{17}{8}$ et $\frac{7}{3}$.

Exemple

► On veut comparer $\frac{17}{8}$ et $\frac{7}{3}$. On commence par mettre sur le même dénominateur positif.

$$\frac{17}{8} = \frac{17 \times 3}{8 \times 3} = \frac{51}{24} \quad \text{et} \quad \frac{7}{3} = \frac{7 \times 8}{3 \times 8} = \frac{56}{24}$$

Exemple

► On veut comparer $\frac{17}{8}$ et $\frac{7}{3}$. On commence par mettre sur le même dénominateur positif.

$$\frac{17}{8} = \frac{17 \times 3}{8 \times 3} = \frac{51}{24} \quad \text{et} \quad \frac{7}{3} = \frac{7 \times 8}{3 \times 8} = \frac{56}{24}$$

Puisque $51 < 56$ on peut conclure que $\frac{51}{24} < \frac{56}{24}$ donc $\frac{17}{8} < \frac{7}{3}$.

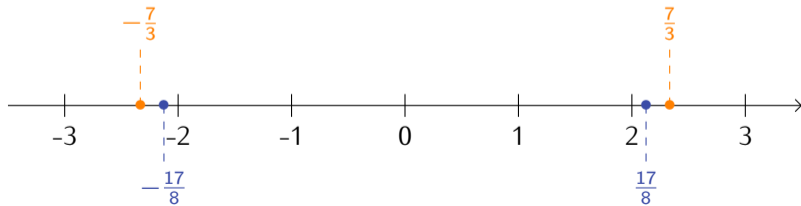
Exemple

- On veut comparer $\frac{17}{8}$ et $\frac{7}{3}$. On commence par mettre sur le même dénominateur positif.

$$\frac{17}{8} = \frac{17 \times 3}{8 \times 3} = \frac{51}{24} \quad \text{et} \quad \frac{7}{3} = \frac{7 \times 8}{3 \times 8} = \frac{56}{24}$$

Puisque $51 < 56$ on peut conclure que $\frac{51}{24} < \frac{56}{24}$ donc $\frac{17}{8} < \frac{7}{3}$.

- De plus, comme $\frac{17}{8} < \frac{7}{3}$, on peut aussi affirmer que $\frac{-17}{8} > \frac{-7}{3}$



3. Additionner et soustraire des fractions

Proposition

Soient a , b et c des nombres relatifs avec $c \neq 0$. On a

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Autrement dit,

- Pour additionner deux fractions, il faut qu'elles soient sur le **même dénominateur** et je peux alors additionner les numérateurs.

Proposition

Soient a , b et c des nombres relatifs avec $c \neq 0$. On a

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Autrement dit,

- Pour additionner deux fractions, il faut qu'elles soient sur le **même dénominateur** et je peux alors additionner les numérateurs.

Exemples

$$\text{► } \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{5} = \frac{6}{5}$$

3.1. Cas où les fractions ont même dénominateur

Proposition

Soient a , b et c des nombres relatifs avec $c \neq 0$. On a

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Autrement dit,

- Pour additionner deux fractions, il faut qu'elles soient sur le **même dénominateur** et je peux alors additionner les numérateurs.

Exemples

$$\text{► } \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\text{► } \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{7-5}{3} = \frac{2}{3}$$

Exemple

On veut réaliser le calcul suivant :

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{3}$$

Exemple

On veut réaliser le calcul suivant :

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{3}$$

Méthode

- ▶ Pour additionner deux fractions (ou plus), **il faut toujours qu'elles soient sur le même dénominateur.**
- ▶ On peut donc multiplier le numérateur **et** le dénominateur des fractions pour se trouver dans ce cas de figure.

Exemple

On veut réaliser le calcul suivant :

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{3}$$

Méthode

- ▶ Pour additionner deux fractions (ou plus), **il faut toujours qu'elles soient sur le même dénominateur.**
- ▶ On peut donc multiplier le numérateur et le dénominateur des fractions pour se trouver dans ce cas de figure.

Pourquoi ?

On peut reprendre l'exemple avec 5 centimètres et 1 mètre. On voudrait additionner 5 cm et 1 m. Quel serait le résultat ? On pourrait naïvement calculer $5+1=6$, mais quelle serait l'unité de ce résultat ? **Cela n'a pas de sens.** Il faut convertir nos longueurs dans la même unité pour les additionner, ce qui correspond à mettre sur le même dénominateur. Le résultat est donc $5 \text{ cm} + 1 \text{ m} = 5 \text{ cm} + 100 \text{ cm} = 105 \text{ cm}$.

Exemple

On veut réaliser le calcul suivant :

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{3}$$

Exemple

On veut réaliser le calcul suivant :

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{3}$$

Correction

- ▶ Je commence par chercher un multiple commun à 5 et 3. On trouve de tête que 15 est dans la table de ces deux nombres : $15 = 3 \times 5$
- ▶ Je mets ensuite sur le même dénominateur et j'additionne les numérateurs

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{3} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} + \frac{7 \times 5}{3 \times 5} = \frac{6}{15} + \frac{35}{15} = \frac{6 + 35}{15} = \frac{41}{15}$$

Exemples

On veut calculer $A = \frac{5}{2} + \frac{2}{3}$.

On écrit les deux fractions avec pour même dénominateur $2 \times 3 = 6$:

$$A = \frac{5}{2} + \frac{2}{3}$$

$$A = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$$

$$A = \frac{15}{6} + \frac{4}{6}$$

$$A = \frac{19}{6}$$

On veut calculer $B = \frac{3}{4} - \frac{11}{6}$.

On écrit les deux fractions avec pour même dénominateur 12 :

$$B = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{11 \times 2}{6 \times 2}$$

$$B = \frac{9}{12} - \frac{22}{12}$$

$$B = \frac{9 - 22}{12}$$

$$B = \frac{-13}{12}$$