D3 Probabilités

g5.re/dse g5.re/qzh g5.re/8a1

1 Langage des probabilités

A Expérience aléatoire

Définitions

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dépendant du hasard dont on peut décrire tous les résultats possibles sans savoir lequel va se produire.
- Chaque résultat possible est une **issue**.

Exemple :

▶ Lancer un dé à jouer est une **expérience aléatoire** ayant six **issues**.
Les **issues** sont : {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

B Évènement

Définitions

- Un **évènement** est un ensemble d'une ou plusieurs **issues**.
- Un évènement constitué d'une seule issue est un **évènement élémentaire**.
- Un évènement toujours réalisé est un **évènement certain**.
- Un évènement jamais réalisé est un **évènement impossible**.
- L'**évènement contraire** d'un évènement A (noté $\overline{A}$) est l'ensemble des issues qui n'appartiennent pas à A.

Exemple : On reprend le lancer de dé.

▶ A : « Obtenir un multiple de 3 » est un **évènement**.
B : « Obtenir 4 » est un **évènement élémentaire**.
C : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 » est un **évènement certain**.
D : « Obtenir 10 » est un **évènement impossible**.
$\overline{A}$: « Obtenir un nombre non multiple de 3 » est un **évènement contraire** de l'évènement A.

2 Calculs de probabilités

A Probabilité d'un évènement

Définition La **probabilité** d'un évènement A est un nombre compris entre 0 et 1 (noté P(A)) qui exprime ses « chances » de réalisation.

Propriétés

- La probabilité d'un évènement impossible est 0 et celle d'un évènement certain est 1.
- La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Exemples :

- $P(C) = 1$ et $P(D) = 0$
- P(«Obtenir 1»)+P(«Obtenir 2»)+P(«Obtenir 3»)+P(«Obtenir 4»)+P(«Obtenir 5»)+P(«Obtenir 6»)=1

B Équiprobabilité

Définition Lorsque les issues d'une expérience aléatoire ont toutes autant de chances de se réaliser, c'est-à-dire que les probabilités de réalisation des différentes issues sont égales, on dit qu'elles sont **équiprobables**.

Propriété En cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement E s'obtient en divisant le nombre d'issues favorables à l'évènement par le nombre total d'issues de l'expérience aléatoire :

$$P(E) = \frac{\textit{Nombre d'issues favorables}}{\textit{Nombre total d'issues}}$$

Exemples :

- Dans le cas du lancer de dé, chaque face a autant de chances de sortir qu'une autre, les issues sont donc équiprobables. Ainsi, la probabilité d'un évènement élémentaire est $\frac{1}{6}$ soit $P(B) = \frac{1}{6}$.
- Soit A : « Obtenir un multiple de 3 », A = {3 ; 6} et les issues sont {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}
  donc $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Remarque : La probabilité d'un évènement s'exprime souvent sous la forme d'une fraction.

C Probabilité d'évènements contraires

Propriété

La somme des probabilités d'un évènement A et de son contraire $\overline{A}$ est égale à 1 :

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Exemple :

- Soit A : « Obtenir un multiple de 3 », A = {3 ; 6} et $\overline{A}$ = {1 ; 2 ; 4 ; 5} donc $P(\overline{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

  Mais on peut calculer $P(\overline{A})$ en utilisant la formule : $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Remarque : C'est parfois beaucoup plus rapide d'utiliser la formule $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ pour calculer la probabilité d'un évènement contraire.

3 Des fréquences aux probabilités

Propriété

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un évènement E finit par se stabiliser autour du nombre P(E).

Exemple :

- Dans le cas du lancer de dé, voici un tableau donnant la fréquence de réalisation de l'évènement B : « Obtenir **4** » en fonction du nombre de lancers effectués.

Nombre de lancers effectués	10	50	200	500	5 000
Fréquence de réalisation de l'évènement B	0,4	0,12	0,18	0,177	0,1712

Plus le nombre de lancers effectués est important et plus la fréquence de réalisation de l'évènement B se rapproche de $P(B) = \frac{1}{6} \approx 0,17$.

Remarque : Certains logiciels, comme les tableurs notamment, permettent de **simuler** la répétition d'un très grand nombre d'expériences aléatoires identiques.

Fiche 1 : aborder la notion de probabilité (1)

1 Dans un jeu de société, les jetons sont des supports de format carré, de même couleur, sur lesquels une lettre de l'alphabet est inscrite. Le revers n'est pas identifiable. Il y a 100 jetons. Le tableau ci-dessous donne le nombre de jetons pour chacune des voyelles.

Lettres du jeu	A	E	I	O	U	Y
Effectif	9	15	8	6	6	1

On choisit au hasard une lettre de ce jeu.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir la lettre I ?

....

b. Quelle est la probabilité d'obtenir une voyelle ?

....

c. Quelle est la probabilité d'obtenir une consonne ?

....

2 Sur le manège « Caroussel », il y a quatre chevaux, deux ânes, un coq, deux lions et une vache. Sur chaque animal, il y a une place. Vaite s'assoit au hasard sur le manège.

a. Quelle est la probabilité qu'elle monte sur un cheval ? Exprime le résultat, sous forme d'une fraction irréductible.

....

On considère les évènements suivants :
A : « Vaite monte sur un âne. »
C : « Vaite monte sur un coq. »
L : « Vaite monte sur un lion. »

b. Définis par une phrase l'évènement non L, puis calcule sa probabilité.

....

....

c. Quelle est la probabilité de l'évènement A ou C ?

....

....

3 On écrit, sur les faces d'un dé équilibré à six faces, chacune des lettres du mot « **NOTOUS** ».
On lance le dé et on regarde la lettre inscrite sur la face supérieure.

a. Quelles sont les issues de cette expérience ?

....

Détermine la probabilité des évènements E.

b. E1 : « On obtient la lettre **O**. »

....

c. E2 : évènement contraire de E1.

....

....

d. E3 : « On obtient une consonne. »

....

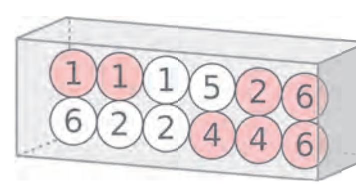
e. E4 : « On obtient une lettre du mot **KIWI**. »

....

f. E5 : « On obtient une lettre du mot **CAGOUS**.»

....

4 On considère une urne contenant des boules blanches ou rouges, et numérotées.



a. Si on s'intéresse à la couleur de la boule, quelles sont les issues possibles ?

....

....

b. Si on s'intéresse au numéro écrit sur la boule, quelles sont les issues possibles ?

....

....

c. Donne un évènement certain de se réaliser.

....

....

d. Donne un évènement impossible.

....

....

1 On place des boules colorées, toutes indiscernables au toucher, dans un sac. Sur chaque boule, est inscrite une lettre. Le tableau suivant présente la répartition des boules.

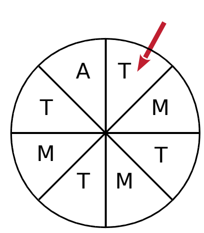
Couleur / Lettre	Rouge	Vert	Bleu
A	3	5	2
B	2	2	6

a. Combien y a-t-il de boules dans le sac ?

b. On tire une boule au hasard, on note sa couleur et sa lettre.

- Vérifie qu'il y a une chance sur dix de tirer une boule bleue portant la lettre A.
- Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
- A-t-on autant de chances de tirer une boule portant la lettre A, que de tirer une boule portant la lettre B ?

2 À un stand du « Heiva », fête traditionnelle de Polynésie française, on fait tourner la roue de loterie ci-contre.



On admet que chaque secteur a autant de chances d'être désigné par la flèche rouge.

Les lettres A, T et M correspondent aux évènements suivants :

- A : « On gagne un autocollant. » ;
- T : « On gagne un tee-shirt. » ;
- M : « On gagne un tour de manège. ».

a. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?

b. Quelle est la probabilité de l'évènement T ?

c. Quelle est la probabilité de l'évènement M ?

d. Exprime, à l'aide d'une phrase, ce qu'est l'évènement non A, puis donne sa probabilité.

3 L'hôtel « la ora na » accueille 125 touristes :

- 55 Néo-Calédoniens dont 12 parlent également anglais ;
- 45 Américains parlant uniquement l'anglais ;
- le reste étant des Polynésiens dont 8 parlent également anglais.

Les Néo-Calédoniens et les Polynésiens parlent tous le français.

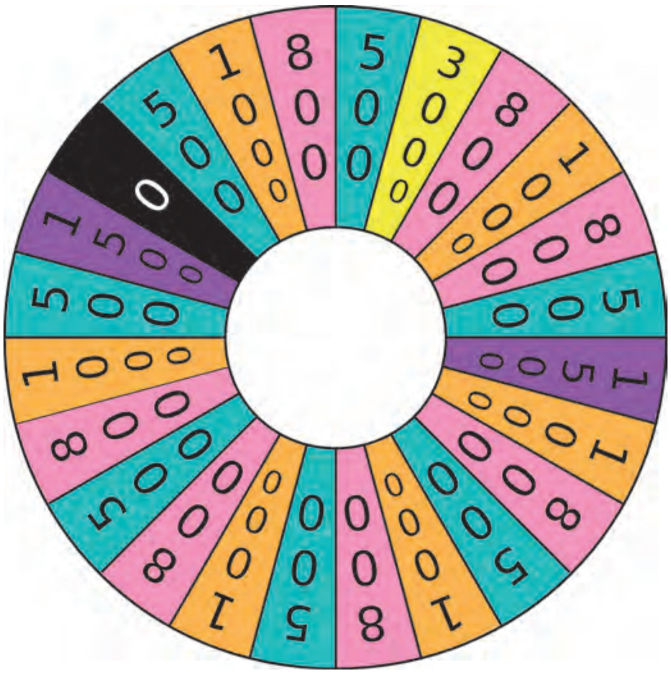
a. Si je choisis un touriste pris au hasard dans l'hôtel, quelle est la probabilité des évènements suivants :

- Évènement A : « Le touriste est un Américain. »
- Évènement B : « Le touriste est un Polynésien ne parlant pas anglais. »
- Évènement C : « Le touriste parle anglais. »

b. Si j'aborde un touriste dans cet hôtel, ai-je plus de chances de me faire comprendre en parlant en anglais ou en français ? Justifie ta réponse.

Fiche 3 : aborder la notion de probabilité (3)

1 On fait tourner la roue des euros.



Quelle est la probabilité...

a. de gagner 800 € ? ....

b. de gagner 1 500 € ? ....

c. de gagner 3 000 € ? ....

d. de gagner 1 000 € et plus ? ....

e. de ne pas perdre ? ....

2 *Retournement de situation*

a. Une bouteille opaque contient 20 billes dont les couleurs peuvent être différentes. Chaque bille a une seule couleur. En retournant la bouteille, on fait apparaitre au goulot une seule bille à la fois. La bille ne peut pas sortir de la bouteille.
Des élèves cherchent à déterminer les couleurs des billes contenues dans la bouteille et leur effectif. Ils retournent la bouteille 40 fois et obtiennent le tableau suivant.

Couleur apparue	rouge	bleue	verte
Nombre d'apparitions de la couleur	18	8	14

Ces résultats permettent-ils d'affirmer que la bouteille contient exactement 9 billes rouges, 4 billes bleues et 7 billes vertes ?

....

....

b. Une seconde bouteille opaque contient 24 billes qui sont soit bleues, soit rouges, soit vertes. On sait que la probabilité de faire apparaitre une bille verte en retournant la bouteille est égale à 3/8, et la probabilité de faire apparaitre une bille bleue est égale à 1/2.
Combien de billes rouges contient la bouteille ?

....

....

3 La 24e édition du Marathon International de Moorea a eu lieu le 18 février 2012. Des coureurs de différentes origines ont participé à ce marathon :

- 90 coureurs provenaient de Polynésie Française, dont 16 étaient des femmes ;
- 7 coureurs provenaient de France Métropolitaine, dont aucune femme ;
- 6 provenaient d'Autriche, dont 3 femmes ;
- 2 provenaient du Japon, dont aucune femme ;
- 11 provenaient d'Italie, dont 3 femmes ;
- 2 provenaient des États-Unis, dont aucune femme ;
- un coureur homme était Allemand.

a. Complète le tableau ci-dessous à l'aide des données de l'énoncé.

				Japon			
Homme							
Femme							

b. Combien de coureurs ont participé à ce marathon ? ....

À la fin du marathon, on interroge un coureur au hasard. Quelle est la probabilité que ce coureur...

c. soit une femme autrichienne ? ....

d. soit une femme ? ....

e. soit un homme polynésien ? ....

f. ne soit pas japonais ? ....

g. Vaitea dit que la probabilité d'interroger un coureur homme polynésien est exactement trois fois plus grande que celle d'interroger un coureur homme non polynésien. A-t-il raison ? Explique pourquoi.

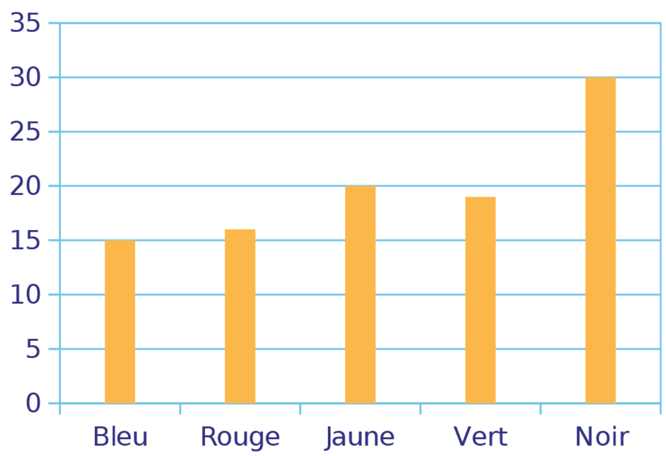
....

....

1 Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules vertes, toutes indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard. Réponds aux affirmations suivantes par Vrai (V) ou Faux (F).

a.	Il y a autant de chances d'avoir une boule verte qu'une boule rouge.	
b.	On a 4 chances sur 10 d'obtenir une boule verte.	
c.	Si on répète un grand nombre de fois cette expérience, la fréquence d'apparition d'une boule verte devrait être proche de 0,6.	
d.	On a 6 chances sur 4 d'obtenir une boule verte.	
e.	La probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{2}{5}$.	

2 Un dé cubique a 6 faces peintes : une en bleu, une en rouge, une en jaune, une en vert et deux en noir. On jette ce dé cent fois, et on note à chaque fois la couleur de la face obtenue. Le schéma ci-dessous donne la répartition des couleurs obtenues lors de ces cent lancers.



Détermine la fréquence d'apparition...

a. de la couleur jaune. ....

b. de la couleur noire. ....

On suppose que le dé est équilibré.
Quelle est la probabilité...

c. d'obtenir la couleur jaune ? ....

d. d'obtenir la couleur noire ? ....

e. Explique l'écart entre les fréquences obtenues aux questions **a** et **b**, et les probabilités trouvées aux questions **c** et **d**.

....

....

....

....

3 On considère l'expérience aléatoire suivante.

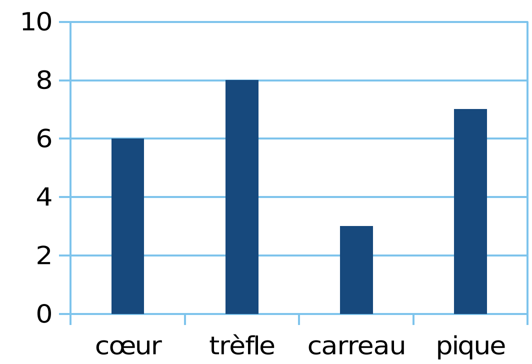
- On tire au hasard une carte dans un jeu, bien mélangé, de 32 cartes.
- On note la « couleur » de cette carte : trèfle, carreau, cœur ou pique.
- On remet la carte dans le jeu et on mélange.

Soit A l'évènement : « La carte tirée est un trèfle. ».

a. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?

....

b. On répète 24 fois l'expérience aléatoire ci-dessus. La représentation graphique ci-dessous donne la répartition des « couleurs » obtenues lors des vingt-quatre premiers tirages.



Calcule la fréquence d'une carte « cœur » et d'une carte « trèfle ».

....

....

....

....

c. On reproduit une fois l'expérience aléatoire.

Arthur mise sur une carte « cœur » et Julie mise sur une carte « trèfle ».
Est-ce que l'un d'entre eux a plus de chances que l'autre de gagner ?

....

....

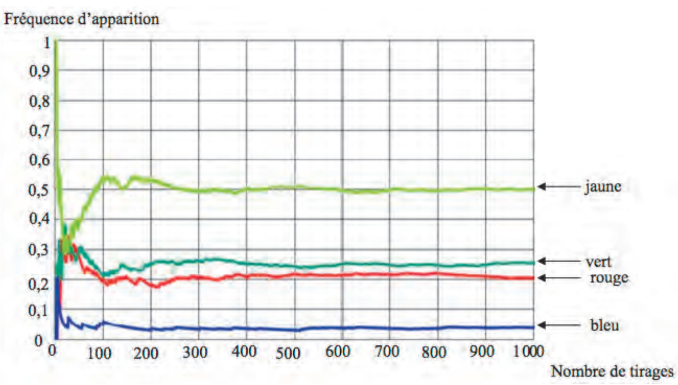
....

....

Fiche 5 : passer des fréquences aux probabilités (2)

1 Un sac contient 20 jetons qui sont soit jaunes, soit verts, soit rouges, soit bleus. On considère l'expérience suivante : tirer au hasard un jeton, noter sa couleur et remettre le jeton dans le sac. Chaque jeton a la même probabilité d'être tiré.

a. Le professeur, qui connait la composition du sac, a simulé un grand nombre de fois l'expérience avec un tableur. Il a représenté ci-dessous la fréquence d'apparition des différentes couleurs en fonction du nombre de tirages.



- Quelle couleur est la plus présente dans le sac ? Aucune justification n'est attendue.

....

- Le professeur a construit la feuille de calcul ci-contre.

	A	B	C
1	Nombre de tirages	Nombre de fois où un jeton rouge est apparu	Fréquence d'apparition de la couleur rouge
2	1	0	0
3	2	0	0
4	3	0	0
5	4	0	0
6	5	0	0
7	6	1	0,166666667
8	7	1	0,142857143
9	8	1	0,125
10	9	1	0,111111111
11	10	1	0,1

Quelle formule a-t-il saisie dans la cellule C2, avant de la recopier vers le bas ?

....

b. On sait que la probabilité de tirer un jeton rouge est de 1/5. Combien y a-t-il de jetons rouges dans ce sac ?

....

....

2 *Lancer de punaises*

a. Lance 50 fois une punaise et note si elle tombe sur la tête (T) ou sur le côté (C).

b. Sur tes 50 lancers, à quelle fréquence la punaise est-elle retombée sur la tête ? ....

c. Complète ce tableau, à l'aide des données de 20 camarades de la classe.

Élève	1er	2^{e}	3^{e}	4^{e}	5^{e}	6^{e}	7^{e}	8^{e}	9^{e}	10^{e}
Effectif de l'évènement T										
Fréquence										
Fréquence cumulée croissante										

Élève	11^{e}	12^{e}	13^{e}	14^{e}	15^{e}	16^{e}	17^{e}	18^{e}	19^{e}	20^{e}
Effectif de l'évènement T										
Fréquence										
Fréquence cumulée croissante										

d. Que remarques-tu ?

....

e. Comment pourrait-on faire pour évaluer la probabilité qu'une punaise tombe sur la tête ?

....

1 On considère un jeu composé d'un plateau tournant et d'une boule. Représenté ci-contre, ce plateau comporte 13 cases numérotées de 0 à 12.

On lance la boule sur le plateau. La boule finit par s'arrêter au hasard sur une case numérotée.
La boule a la même probabilité de s'arrêter sur chaque case.

a. Quelle est la probabilité que la boule s'arrête sur la case numérotée 8 ?

b. Quelle est la probabilité que le numéro de la case sur lequel la boule s'arrête soit un nombre impair ?

c. Quelle est la probabilité que le numéro de la case sur laquelle la boule s'arrête soit un nombre premier ?

d. Lors des deux derniers lancers, la boule s'est arrêtée à chaque fois sur la case numérotée 9.
A-t-on maintenant plus de chances que la boule s'arrête sur la case numérotée 9 plutôt que sur la case numérotée 7 ? Argumenter à l'aide d'un calcul de probabilités.

2 Le baklava est une pâtisserie traditionnelle dans plusieurs pays comme la Bulgarie ou le Maroc. Il s'agit d'un dessert long à préparer, à base de pâte feuilletée, de miel, de noix ou de pistaches ou de noisettes, selon les régions. Dans un sachet non transparent, on a sept baklavas indiscernables au toucher portant les lettres du mot BAKLAVA.

B A K L A V A

On tire au hasard un gâteau dans ce sachet et on regarde la lettre inscrite sur le gâteau.

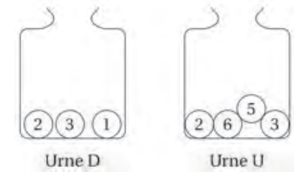
a. Quelles sont les issues de cette expérience ?

b. Déterminer les probabilités suivantes.

- La lettre tirée est un L.
- La lettre tirée n'est pas un A.

c. Enzo achète un sachet contenant 10 baklavas tous indiscernables au toucher. Ce sachet contient 2 baklavas à base de pistaches, 4 baklavas à base de noisettes et les autres baklavas sont à base de noix. Enzo pioche au hasard un gâteau et le mange ; c'est un gâteau à base de noix. Il souhaite en manger un autre. Son amie Laura affirme que, s'il veut maintenant prendre un nouveau gâteau, il aura plus de chances de piocher un gâteau à base de noix. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.

3 Deux urnes contiennent des boules numérotées indiscernables au toucher.
Le schéma ci-contre représente le contenu de chacune des urnes.



On forme un nombre entier à deux chiffres en tirant au hasard une boule dans chaque urne :

- le chiffre des dizaines est le numéro de la boule issue de l'urne D ;
- le chiffre des unités est le numéro de la boule issue de l'urne U.

Exemple : en tirant la boule 1 de l'urne D, puis la boule 5 de l'urne U, on forme le nombre 15.

a. A-t-on plus de chances de former un nombre pair que de former un nombre impair ?

b. Sans justifier, indiquer les nombres premiers qu'on peut former lors de cette expérience.

c. Montrer que la probabilité de former un nombre premier est égale à $\frac{1}{6}$.

d. Définir un évènement dont la probabilité de réalisation est égale à $\frac{1}{3}$.

4 Dans une urne contenant des boules vertes et des boules bleues, on tire au hasard une boule et on regarde sa couleur. On replace ensuite la boule dans l'urne et on mélange les boules.
La probabilité d'obtenir une boule verte est $\frac{2}{5}$.

a. Expliquer pourquoi la probabilité d'obtenir une boule bleue est égale à $\frac{3}{5}$.

b. Paul a effectué 6 tirages et a obtenu une boule verte à chaque fois. Au 7e tirage, aura-t-il plus de chances d'obtenir une boule bleue qu'une boule verte ?

c. Déterminer le nombre de boules bleues dans cette urne, sachant qu'il y a 8 boules vertes.

5 Dans son lecteur audio, Théo a téléchargé 375 morceaux de musique. Parmi eux, il y a 125 morceaux de rap. Il appuie sur la touche *Lecture aléatoire* qui lui permet d'écouter un morceau choisi au hasard parmi tous les morceaux disponibles.

a. Quelle est la probabilité qu'il écoute du rap ?

b. La probabilité qu'il écoute du rock est égale à $\frac{7}{15}$. Combien Théo a-t-il de morceaux de rock dans son lecteur audio ?

c. Alice possède 40 % de morceaux de rock dans son lecteur audio. Si Théo et Alice appuient tous les deux sur la touche *Lecture aléatoire* de leur lecteur audio, lequel a le plus de chances d'écouter un morceau de rock ?