G2 Théorème de Pythagore

g5.re/z66 g5.re/8eb g5.re/ptm

1 Carré d'un nombre et racine carrée d'un nombre positif

A Carré d'un nombre

Définition Le carré d'un nombre a est le nombre positif $a^2 = a \times a$.

Exemple :

- Voici la liste des premiers carrés parfaits (carrés des premiers nombres entiers).

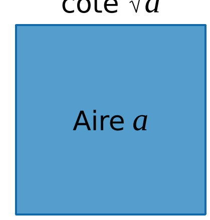
a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

Remarque :
Pour calculer le carré d'un nombre avec la calculatrice, on utilise la touche x^2.

B Racine carrée d'un nombre positif

Définition La racine carrée d'un nombre a positif est le nombre positif noté $\sqrt{a}$ dont le carré est a.

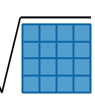
Soit, pour tout nombre a positif, $(\sqrt{a})^2 = a$.



Remarque :

- Le symbole $\sqrt{}$ s'appelle un radical.
- La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

Propriété 1 Pour tout nombre a positif, $\sqrt{a}$ est la longueur du côté d'un carré d'aire a.

Exemple : La racine carrée de 16 notée $\sqrt{16}$ est 4 car $4 \times 4 = 4^2 = 16$. Soit $\sqrt{}$  $= \sqrt{16} = 4$.

Propriété 2 Pour tout nombre a positif, $\sqrt{a^2} = a$.

Exemple :

- $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

Remarque :
Pour calculer la racine carrée d'un nombre positif avec la calculatrice, on utilise la touche $\sqrt{x}$.
Elle permet de calculer la valeur exacte ou une valeur approchée de la racine carrée.

Exemples :

- $\sqrt{132{,}25} = 11{,}5$ donc 11,5 est la valeur exacte de $\sqrt{132{,}25}$.
- $\sqrt{130} \approx 11{,}4$ donc 11,4 est une valeur approchée au dixième près de $\sqrt{130}$.

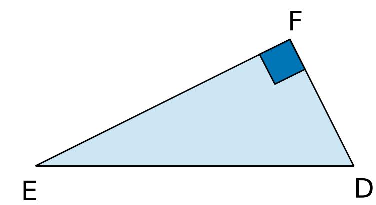
2 Vocabulaire du triangle rectangle

Définitions

- Un **triangle rectangle** est un triangle qui a un angle droit.
- Le côté opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse**.
  C'est le plus grand côté du triangle.

Exemple :

- DEF est un **triangle rectangle** en F.
- [DE] est l'**hypoténuse** : c'est le plus grand côté du triangle rectangle.
- Les deux autres côtés [EF] et [DF] sont perpendiculaires.



3 Le théorème direct

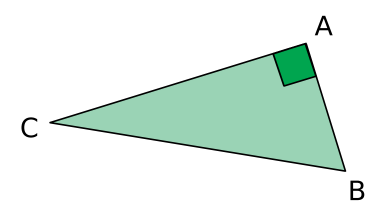
A Théorème de Pythagore

Théorème

Si un triangle est rectangle
alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Exemple :

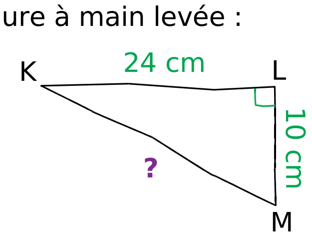
- ABC est un triangle **rectangle en A** d'hypoténuse [BC]
  donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :
  $BC^2 = AB^2 + AC^2$



B Calcul de la longueur de l'hypoténuse

Exemple : Soit KLM un triangle rectangle en L tel que KL = 24 cm et LM = 10 cm. Calcule KM.

Figure à main levée :



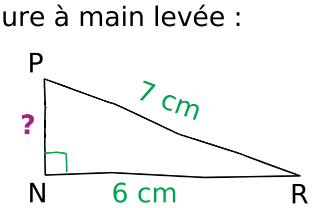
Le triangle KLM est rectangle en L, son hypoténuse est le côté [KM].
Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$KM^2 = LK^2 + LM^2$
$KM^2 = 24^2 + 10^2$
$KM^2 = 576 + 100$
$KM^2 = 676$
$KM = \sqrt{676}$ cm
$KM = 26$ cm (**valeur exacte**)

C Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit

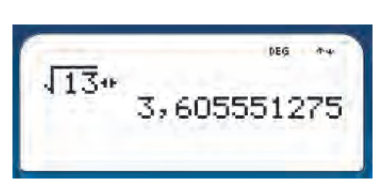
Exemple : Soit NPR un triangle rectangle en N tel que PR = 7 cm et NR = 6 cm. Calcule NP.

Figure à main levée :



Le triangle NPR est rectangle en N, son hypoténuse est le côté [PR].
Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

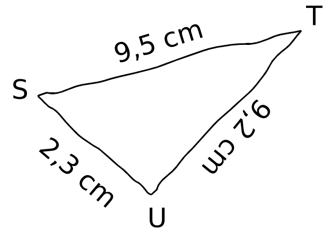
$PR^2 = NP^2 + NR^2$
$7^2 = NP^2 + 6^2$
$NP^2 = 7^2 - 6^2$
$NP^2 = 49 - 36$
$NP^2 = 13$
$NP = \sqrt{13}$ cm (**valeur exacte**)
$NP \approx 3,6$ cm (**valeur approchée au dixième**)



D Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Exemple : STU est un triangle tel que ST = 9,5 cm, TU = 9,2 cm et SU = 2,3 cm.
Démontre que STU n'est pas un triangle rectangle.

On effectue d'abord une figure à main levée :



Le plus grand côté est [ST] donc on calcule séparément :

ST^2	et	$TU^2 + SU^2$
$= 9{,}5^2$		$= 9{,}2^2 + 2{,}3^2$
$= 90{,}25$		$= 84{,}64 + 5{,}29$
		$= 89{,}93$

$ST^2 \neq TU^2 + SU^2$

On en déduit donc que le triangle STU n'est pas rectangle.

4 Le théorème réciproque

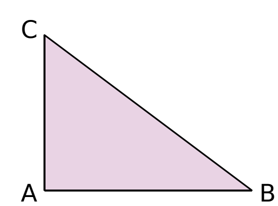
A Réciproque du théorème de Pythagore

Théorème

Si, dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés **alors** ce triangle est un triangle rectangle.

Exemple :

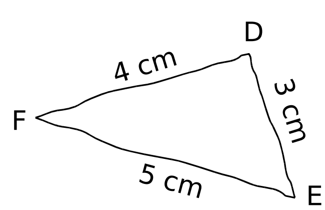
- ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
  Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est **rectangle en A**.
  Son hypoténuse est le plus grand côté, c'est-à-dire [BC].



B Démontrer qu'un triangle est rectangle

Exemple : DEF est un triangle tel que DE = 3 cm, EF = 5 cm et DF = 4 cm.
Démontre que DEF est un triangle rectangle.

On effectue d'abord une figure à main levée :



Le plus grand côté est [EF], donc on calcule séparément :

EF^2	et	$DE^2 + DF^2$
$= 5^2$		$= 3^2 + 4^2$
$= 25$		$= 9 + 16$
		$= 25$

$EF^2 = DE^2 + DF^2$

On en déduit donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle DEF est rectangle en D.

1 Calcule mentalement.

a. 7^2 = ...

b. 9^2 = ...

c. 1^2 = ...

d. 8^2 = ...

2 Complète.

a. ....^{2} = 100

b. ....^{2} = 36

c. ....^{2} = 144

d. ....^{2} = 16

3 Calcule mentalement.

a. $\sqrt{121}$ = ...

b. $\sqrt{25}$ = ...

c. $\sqrt{4}$ = ...

d. $\sqrt{169}$ = ...

4 Complète.

a. $\sqrt{\ldots\ldots}$ = 3

b. $\sqrt{\ldots\ldots}$ = 6

c. $\sqrt{\ldots\ldots}$ = 4

d. $\sqrt{\ldots\ldots}$ = 12

5 Complète les tableaux en utilisant judicieusement les touches $\sqrt{x}$ et x^2 de ta calculatrice.

a	0,81	1,21	2,25	12,96	289	4 774,81	9 604	40 000
$\sqrt{a}$								

a								
$\sqrt{a}$	0,4	1,6	2,25	14	19	30,9	42,7	101

6 Donne la valeur de chaque nombre, arrondie au centième.

	$\sqrt{0{,}6}$	$\sqrt{1{,}11}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3{,}4}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{15}$	$\sqrt{28{,}86}$	$\sqrt{130{,}8}$
Valeur								

7 Calcule en utilisant les touches $\sqrt{x}$ ou x^2 de ta calculatrice. Toutes les longueurs sont en cm.

a. AB = 4,2

donc AB^2 = ...

b. CD = 7,5

donc CD^2 = ...

c. EF = 24

donc EF^2 = ...

d. GH = 8,3

donc GH^2 = ...

e. JK = 8,4

donc JK^2 = ...

f. LM^2 = 324

donc LM = ...

g. NP^2 = 0,49

donc NP = ...

h. RS^2 = 400

donc RS = ...

i. TU^2 = 12,25

donc TU = ...

j. VW^2 = 961

donc VW = ...

8 Même énoncé qu'à l'exercice précédent. Tu arrondiras éventuellement au dixième.

a. BC^2 = 196

donc BC = ...

b. DE = 0,8

donc DE^2 = ...

c. FG^2 = 7,29

donc FG = ...

d. HJ = 6,7

donc HJ^2 = ...

e. KL^2 = 3

donc KL ≈ ....

f. MN = 11,1

donc MN^2 = ...

g. PR^2 = 214

donc PR ≈ ....

h. ST = 3,4

donc ST^2 = ...

i. UV^2 = 278,89

donc UV = ...

j. WX = 16

donc WX^2 = ...

9 **a.** En utilisant ta calculatrice, calcule.

$4^2 + 5^2$ = ... $50^2 + 17^2$ = ...

9^2 = ... 67^2 = ...

b. Que peux-tu déduire de ces égalités ?

....

....

....

10 En utilisant ta calculatrice, calcule.

a. $8^2 + 12^2$ = ...

b. $12^2 - 8^2$ = ...

c. $60^2 + 25^2$ = ...

d. $60^2 - 25^2$ = ...

e. $5{,}9^2 + 3^2$ = ...

f. $5{,}9^2 - 3^2$ = ...

g. $7{,}2^2 + 6{,}8^2$ = ...

h. $7{,}2^2 - 6{,}8^2$ = ...

i. $4{,}6^2 + 8{,}5^2$ = ...

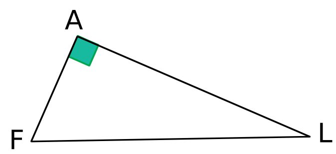
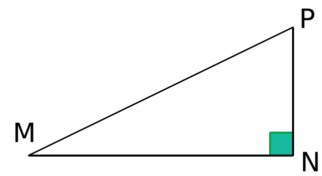
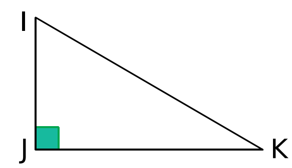
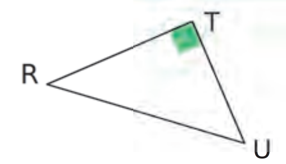
j. $8{,}5^2 - 4{,}6^2$ = ...

k. $9{,}1^2 + 9{,}1^2$ = ...

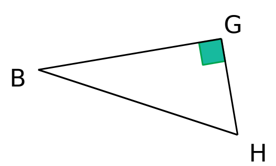
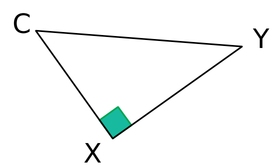
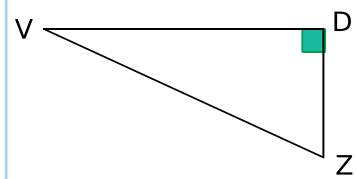
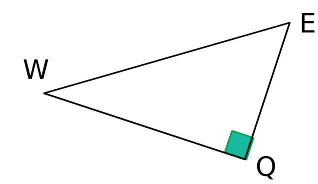
l. $9{,}1^2 - 1{,}1^2$ = ...

Fiche 2 : connaitre le vocabulaire du triangle rectangle

1 Pour chaque triangle, indique en quel point il est rectangle, quelle est son hypoténuse, puis écris l'égalité de Pythagore correspondante.

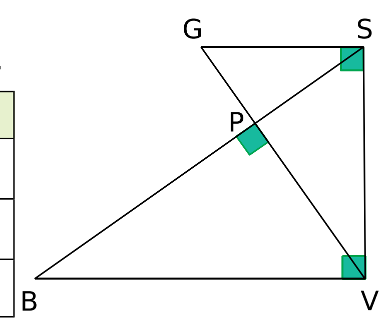
			
AFL est rectangle en ..... Son hypoténuse est	....	....	....
FL^2 = ...			

2 Écris l'égalité de Pythagore pour chacun des triangles rectangles suivants.

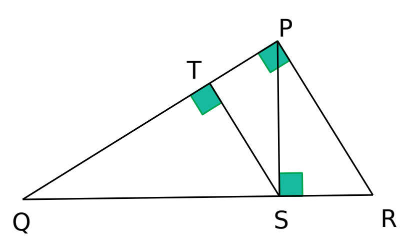
			
BH^2 = ...			

3 Dans la figure ci-contre, les points G, P et V sont alignés, ainsi que les points B, P et S. Complète le tableau avec tous les triangles rectangles codés.

Triangle	Rectangle en...	Hypoténuse	Égalité de Pythagore



4 Écris l'égalité de Pythagore dans chacun des triangles rectangles de la figure ci-dessous.



....

....

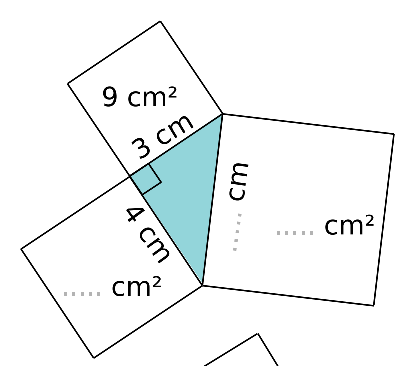
....

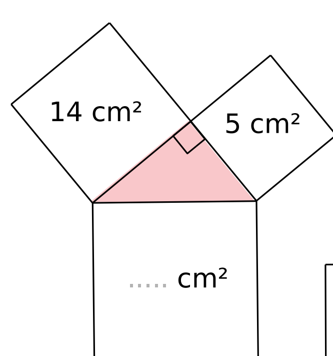
....

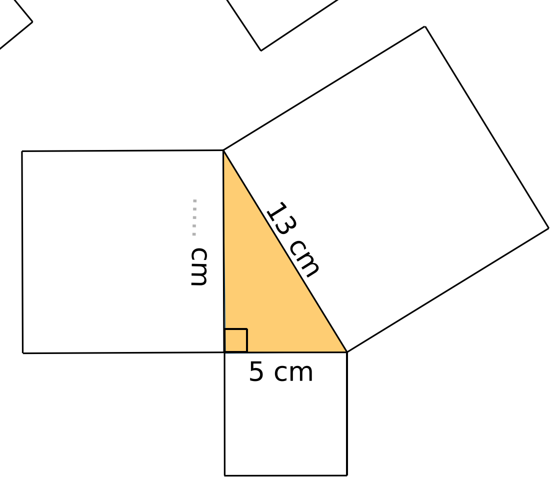
....

....

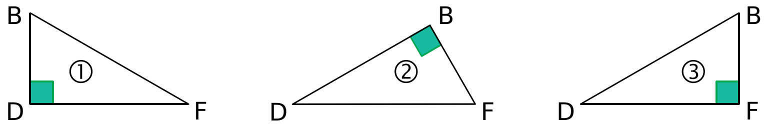
5 Pour chaque figure, un carré est dessiné sur chaque côté du triangle rectangle.
Détermine la (les) mesure(s) manquante(s) : aire ou longueur.







1 Associe à chaque égalité de Pythagore le triangle rectangle correspondant.



$BD^2 = BF^2 + FD^2$ ⇨ triangle rectangle ......

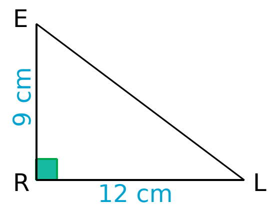
$BF^2 = BD^2 + DF^2$ ⇨ triangle rectangle ......

$DF^2 = DB^2 + BF^2$ ⇨ triangle rectangle ......

2 *Calcul de la longueur de l'hypoténuse*

ERL est un triangle
rectangle en R,
tel que :
ER = 9 cm ;
RL = 12 cm.

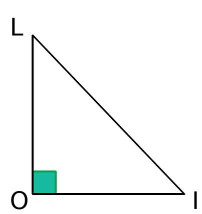
Calcule la longueur EL.



3 *Calcul de la longueur de l'hypoténuse (bis)*

LOI est un triangle
rectangle en O,
tel que :
LO = 21 cm ;
OI = 20 cm.

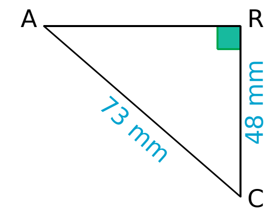
Calcule la longueur LI.



4 *Calcul d'un côté de l'angle droit*

ARC est un triangle
rectangle en R,
tel que :
AC = 73 mm ;
RC = 48 mm.

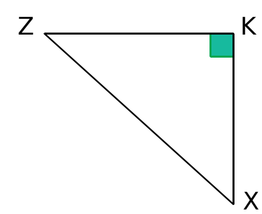
Calcule la longueur AR.



5 *Calcul d'un côté de l'angle droit (bis)*

KXZ est un triangle
rectangle en K,
tel que :
KX = 6,5 cm ;
ZX = 9,7 cm.

Calcule la longueur KZ.

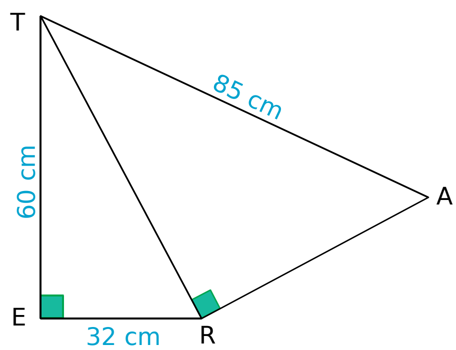


Fiche 4 : appliquer le théorème de Pythagore (2)

1 On considère cette figure.

a. Calcule RT.

b. Calcule RA.



a.

b.

2 Alexis a une table carrée de 2 mètres de côté. Au magasin, la seule nappe qui lui plait est une nappe ronde de 2,5 mètres de diamètre.
Cette nappe sera-t-elle assez grande pour recouvrir entièrement la table (évidemment, Alexis ne découpera pas la nappe) ?
Justifie la réponse.

3 Pour répondre à la demande d'un client, un décorateur a besoin de découper des triangles dans du carrelage. Les triangles doivent être rectangles et isocèles avec une hypoténuse de longueur 15 cm.

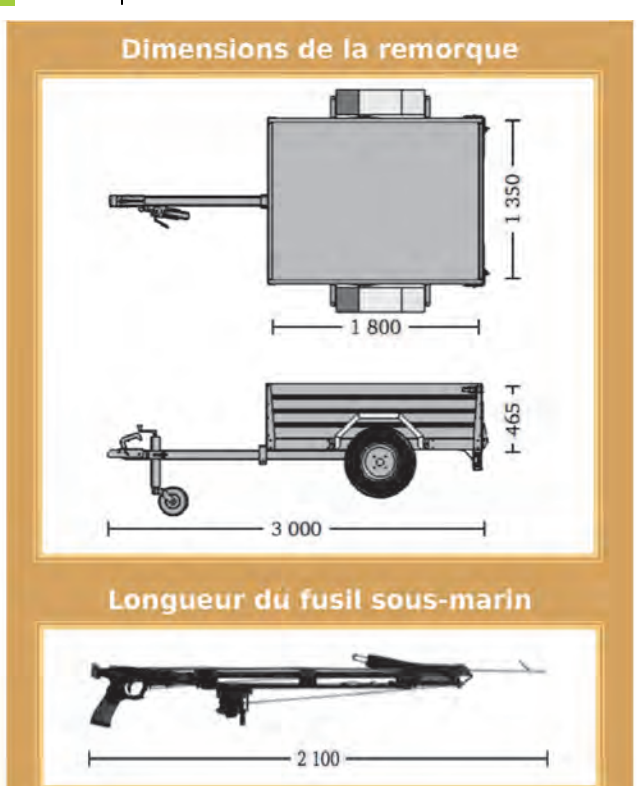
Les carreaux qu'il doit utiliser sont des carrés de 12 cm de côté. Ces carreaux sont-ils assez grands pour faire deux de ces triangles dans chacun d'eux ? Justifie.

1 À Pise, vers 1200 après J.-C. (problème attribué à Léonard de Pise, dit Fibonacci, mathématicien italien du Moyen Âge), une lance, longue de 20 pieds*, est posée verticalement le long d'une tour considérée comme perpendiculaire au sol.

Si on éloigne l'extrémité de la lance qui repose sur le sol de 12 pieds de la tour, de combien descend l'autre extrémité de la lance le long du mur ?

** Un pied est une unité de mesure anglo-saxonne valant environ 30 cm.*

2 On dispose des informations suivantes :



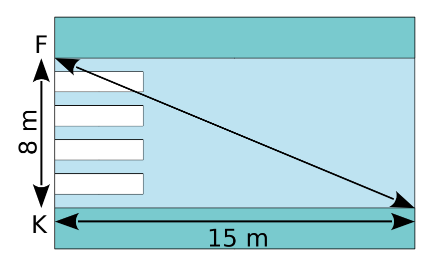
Toutes les valeurs présentes sur les schémas sont en millimètres. On suppose que le fond de la remorque est un rectangle.

Le fusil sous-marin peut-il être placé « à plat » dans la remorque ? Justifie la réponse.

3 Julien est en retard pour aller rejoindre ses amis au terrain de basket. Il décide alors de traverser imprudemment la route, du point J au point F, sans utiliser les passages piétons.

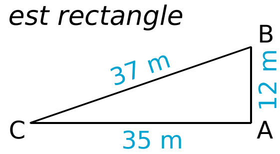
Le passage piéton est supposé perpendiculaire au trottoir. En moyenne, un piéton met 9 secondes pour parcourir 10 mètres.

Combien de temps Julien a-t-il gagné en traversant sans utiliser le passage piéton ?



Fiche 6 : démontrer qu'un triangle est rectangle ou non (1)

1 *Démontrer qu'un triangle est rectangle*



Le triangle ABC est tel que :
AB = 12 m ; AC = 35 m ; et
BC = 37 m.

a. Quel côté de ce triangle pourrait être l'hypoténuse ? Justifie.

....

....

b. Calcule puis compare BC² et AB² + AC².

Dans le triangle ABC, le plus long côté est ....

Donc on calcule séparément :

BC² = ...	........² + ...² = ...
BC² = ...	.... = ...
	.... = ...

....

c. Conclus.

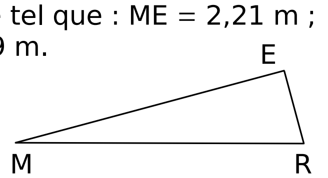
Donc, d'après ....

....,

le triangle ABC ....

....

2 Soit MER un triangle tel que : ME = 2,21 m ; ER = 0,6 m et MR = 2,29 m.



Montre que le triangle MER est rectangle et précise en quel point.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

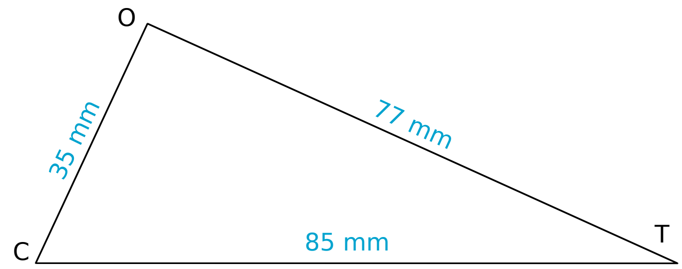
....

....

....

3 *Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle*

Le triangle TOC est tel que :
TO = 77 mm ; OC = 35 mm et CT = 85 mm.



a. Quel côté de ce triangle pourrait être l'hypoténuse ? Justifie.

....

....

b. Calcule puis compare CT² et CO² + OT².

Dans le triangle TOC, le plus long côté est ....

Donc on calcule séparément :

CT² = ...	........² + ...² = ...
CT² = ...	.... = ...
	.... = ...

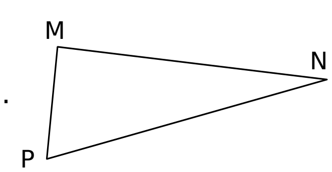
....

c. Conclus.

....

....

4 Soit MNP un triangle tel que : MN = 9,6 cm ; MP = 4 cm et NP = 10,3 cm.



Montre que le triangle MNP n'est pas rectangle.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

1 Dans tout cet exercice, le **triplet** $(a\ ;b\ ;c)$ correspond à un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c (exprimées dans la même unité).

a. Montre que le triangle (5 ; 12 ; 13) est un triangle rectangle.

b. Quand on multiplie les longueurs de ce triangle par 2, on obtient le triangle (10 ; 24 ; 26). Est-il rectangle ? Justifie.

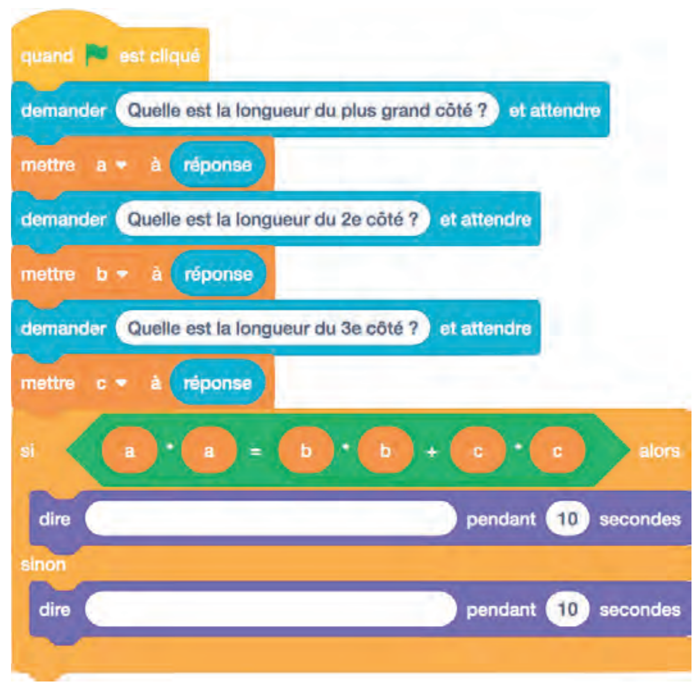
c. De la même façon, détermine deux autres triplets correspondant à des triangles rectangles.

2 Soit ABCD un parallélogramme.
On donne, en mètres :
AB = 8,8 ; BC = 77,19
et AC = 77,69.

ABCD est-il un rectangle ? Justifie.

Schéma :

3 On considère ce programme SCRATCH.



a. Quel est le but de ce script ?

b. Recopie-le puis complète-le. Tu dois d'abord créer les variables **a**, **b** et **c** (bloc *Variables*, *Créer une variable*).

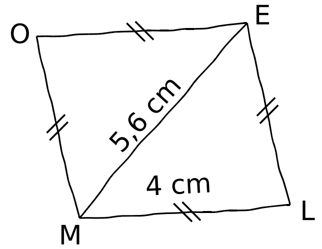
c. Teste-le avec le triangle (3 ; 4 ; 5).

d. Grâce à ce script, complète le tableau suivant.

Côté 1	Côté 2	Côté 3	Rectangle ?
7	6	5	
85	51	68	
80	82	18	
16	25	30	
7	24	25	
45	35	55	

Fiche 8 : démontrer qu'un triangle est rectangle ou non (3)

1 Voici la figure à main levée d'un quadrilatère.



a. Pourquoi peut-on affirmer que OELM est un losange ?

....

....

....

....

b. Marie soutient que OELM est un carré, mais Valérie est persuadée que ce n'est pas vrai. Qui a raison ? Pourquoi ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

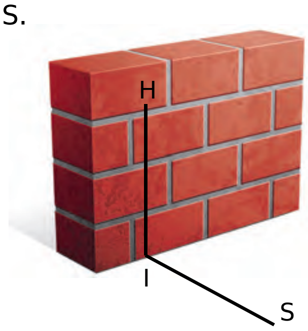
....

....

2 Au lycée professionnel, Jacques et Patrick, futurs maçons, s'entrainent en construisant un mur chacun. Leur professeur, M. Ecker, vient vérifier si chaque mur est bien « droit », c'est-à-dire perpendiculaire au sol. Ayant oublié sa caisse à outils dans son atelier, il ne possède que le mètre ruban qu'il avait dans sa poche.

Pour chacun des murs, M. Ecker place au pied du mur un point I, un point H à 60 cm de hauteur sur le mur, et un autre point S au sol à 80 cm de I, puis il mesure la longueur HS.

Pour le mur de Jacques, il trouve 1 m et pour celui de Patrick 95 cm.



a. Le mur de Jacques est-il « droit » ? Détaille ton raisonnement.

b. Et celui de Patrick ? Justifie.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

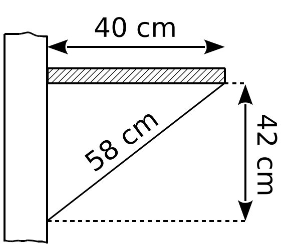
....

....

....

....

3 M. Brico a posé une étagère de 40 cm de profondeur sur un mur parfaitement vertical. Pour vérifier qu'elle est bien posée, il a pris les mesures ci-contre.



Son étagère est-elle parfaitement horizontale ?

....

....

....

....

....

....

....

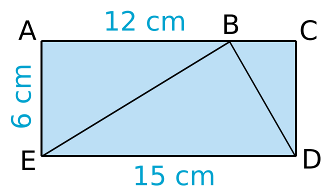
....

....

....

1 ACDE est un rectangle.

On veut savoir si le triangle BED ci-contre est rectangle.



a. Quelle est la nature des triangles ABE et BCD ?

....

....

....

....

b. Calcule BE² et BD².

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

c. Le triangle BED est-il rectangle ?

....

....

....

....

....

....

....

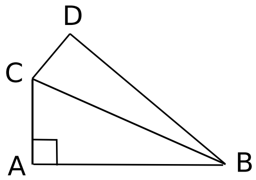
....

....

....

2 *En cascade...*

a. Construis la figure ci-contre en vraie grandeur telle que : AB = 4,2 cm ; AC = 3,4 cm ; CD = 2,1 cm et BD = 5 cm.



b. Calcule BC et donne un arrondi au dixième.

....

....

....

....

....

....

....

....

c. Le triangle CDB est-il isocèle ?

....

....

....

d. Le triangle CDB est-il rectangle ?

....

....

....

....

....

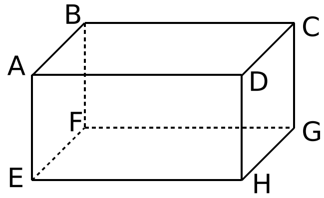
....

....

....

G2 Fiche 10 : résoudre des problèmes (2)

1 La taille d'un colis ayant la forme d'un pavé droit est autorisée, à condition que la somme des longueur, largeur et hauteur ne dépasse pas 1,5 m.



a. Une boite mesure 60 cm de long et 40 cm de large. Quelle peut être sa hauteur pour servir d'emballage à un colis ?

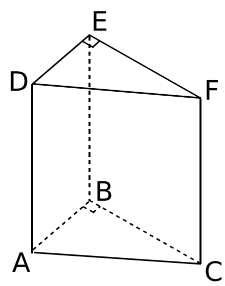
b. On veut savoir si une telle boite permettrait d'envoyer une canne à pêche mesurant 80 cm. Qu'en penses-tu ?

c. Calcule FH^2.

d. Calcule FD.

e. Cela confirme-t-il ta première impression ?

2 On considère le prisme droit ci-contre : sa base ABC est un triangle rectangle en B.



a. Quelle est la nature de ses faces latérales ?

b. Déduis-en la nature des triangles ACF et ABE.

On donne les dimensions suivantes :
AB = 3 cm ; BC = 5 cm et FC = 10 cm.

c. Détermine les longueurs BE et EF.

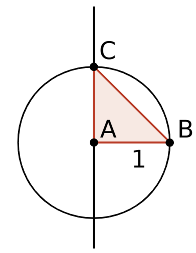
d. Calcule AC^2, puis déduis-en AF^2.

e. Calcule AE^2.

f. Le triangle AEF est-il rectangle ?

1 Géométrie dynamique *Escargot de Pythagore*

Création de l'outil



a. Dans un logiciel de géométrie dynamique, crée la figure ci-contre, sachant que le segment [AB] a pour longueur 1 et que la droite (AC) est perpendiculaire au segment [AB].

b. Dans le menu *Outils*, choisis *Créer un nouvel outil*.

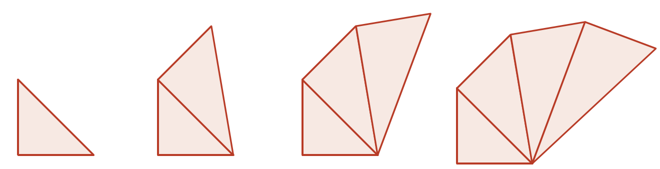
- Dans *Objets finaux*, sélectionne le point C et le triangle ABC, nommé t1.
- Dans *Objets initiaux*, sélectionne les points A et B.
- Pour *Nom et icône*, écris : Triangle rectangle pour le *Nom de l'outil* et le *Nom de commande*.
- Pour *Aide pour l'outil*, écris : Clique sur les extrémités de l'hypoténuse.
- Clique sur *Fin*.

Finalisation de l'escargot

c. À partir de cette figure, sélectionne l'outil *Triangle rectangle*, puis clique sur les points C et B, dans cet ordre. Tu arrives à l'étape 2.

d. Poursuis ainsi jusqu'où tu peux.

e. Qu'ont ces triangles de remarquable ?



Étape 1 Étape 2 Étape 3 Étape 4

....

....

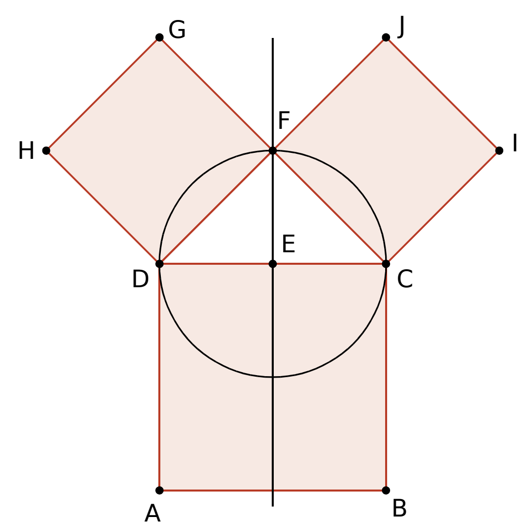
2 Géométrie dynamique *Arbre de Pythagore*

Création de l'outil

a. Dans un logiciel de géométrie dynamique, crée la figure ci-contre, sachant que les quadrilatères ABCD, DFGH et FCIJ sont des carrés, que E est le milieu du segment [DC], et que la droite (EF) est perpendiculaire à [DC].

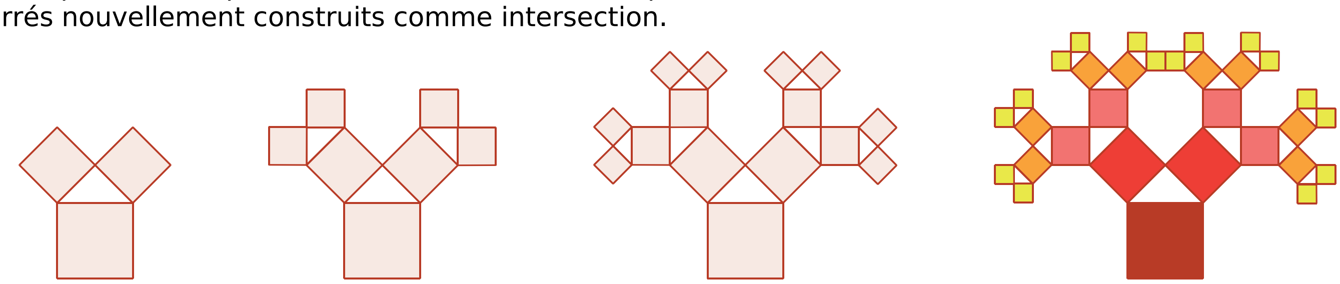
b. Dans le menu *Outils*, choisis *Créer un nouvel outil*.

- Dans *Objets finaux*, sélectionne seulement le carré DFGH, nommé poly2 et le carré FCIJ, nommé poly3.
- Dans *Objets initiaux*, sélectionne les points A et B.
- Pour *Nom et icône*, écris : Branches de l'arbre pour le *Nom de l'outil* et le *Nom de commande*.
- Pour *Aide pour l'outil*, écris : Clique sur deux points du triangle rectangle.
- Clique sur *Fin*.



Finalisation de l'arbre

c. À partir de cette figure, sélectionne l'outil Branches de l'arbre. Clique sur les points D et F, dans cet ordre, puis sur les points F et C. Tu arrives à l'étape 2. Définis ensuite les sommets communs aux deux carrés nouvellement construits comme intersection.



Étape 1 Étape 2 Étape 3 Étape 4

d. Poursuis ainsi, puis colorie pour obtenir la figure finale ci-dessus.