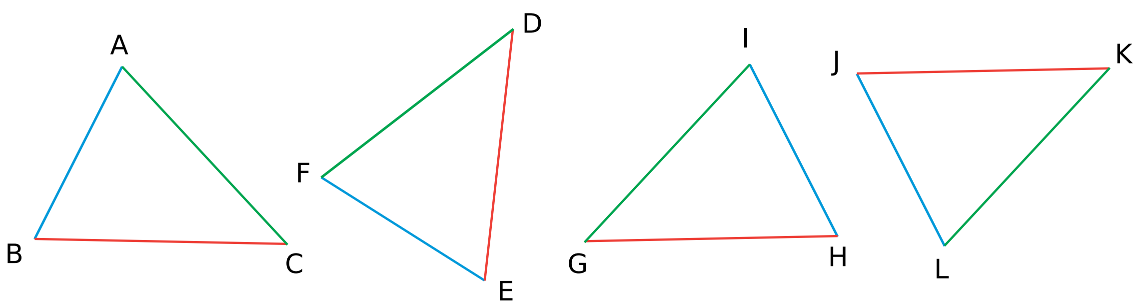
G1 Triangles et parallèles

g5.re/t3c g5.re/fv2 g5.re/va2

1 Cas d'égalité des triangles

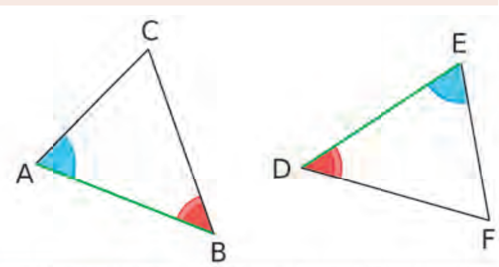
Définition
Deux triangles sont **isométriques** si leurs côtés ont la même longueur deux à deux.

Exemple : Les triangles ABC, DEF, GHI et JKL sont isométriques.
▶ Ils sont superposables par glissement et/ou retournement.



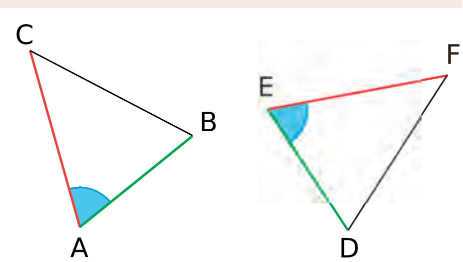
Propriété 1 **Si** deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure deux à deux **alors** ils sont isométriques.

Exemple :
AB = DE
Le côté [AB] est compris entre les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$.
Le côté [DE] est compris entre les angles $\widehat{FED}$ et $\widehat{EDF}$.
De plus, $\widehat{CAB} = \widehat{FED}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{EDF}$.
Donc les triangles ABC et EDF sont isométriques.



Propriété 2 **Si** deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur deux à deux **alors** ils sont isométriques.

Exemple :
$\widehat{CAB} = \widehat{FED}$
L'angle $\widehat{CAB}$ est compris entre les côtés [AC] et [AB].
L'angle $\widehat{FED}$ est compris entre les côtés [EF] et [ED].
De plus, AC = EF et AB = ED.
Donc les triangles ABC et DEF sont isométriques.

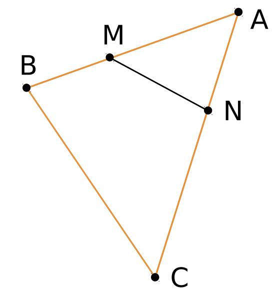


Propriété 3 **Si** deux triangles sont isométriques **alors** :
- leurs angles ont la même mesure ;
- leurs aires sont égales.

Remarques : Attention, la réciproque n'est pas forcément vraie.
- Deux triangles peuvent avoir des angles de même mesure deux à deux sans pour autant être isométriques.
- Deux triangles peuvent avoir la même aire sans pour autant être isométriques.

2 Le théorème direct de Thalès

A Configuration

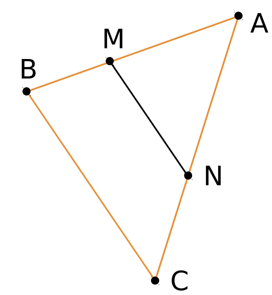


On considère un triangle ABC, un point M appartenant à [AB] et un point N appartenant à [AC].

On associe deux à deux les côtés des triangles emboités ABC et AMN :

Côtés du triangle ABC	[AB]	[AC]	[BC]
Côtés du triangle AMN	[AM]	[AN]	[MN]

B Théorème de Thalès

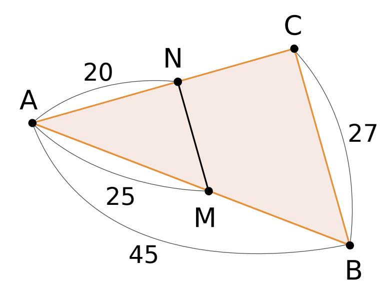


Théorème

Si, dans un triangle ABC, M ∈ [AB], N ∈ [AC] et les droites (BC) et (MN) sont parallèles **alors** $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Remarque : Les longueurs des côtés du triangle AMN sont proportionnelles aux longueurs des côtés associés du triangle ABC.

C Calcul de longueurs



Exemple 1 :

Dans cette figure, les droites (BC) et (MN) sont parallèles,
AM = 25 mm ; AB = 45 mm ; AN = 20 mm et BC = 27 mm.
On cherche à déterminer les longueurs AC et MN.

Dans le triangle ABC, M ∈ [AB], N ∈ [AC] et les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, ce qui donne, en remplaçant par les longueurs connues : $\frac{25}{45} = \frac{20}{AC} = \frac{MN}{27}$.

Calcul de AC :

$\frac{25}{45} = \frac{20}{AC}$ donc $25 \times AC = 45 \times 20$

$AC = \frac{45 \times 20}{25}$

donc AC = 36 mm

Calcul de MN :

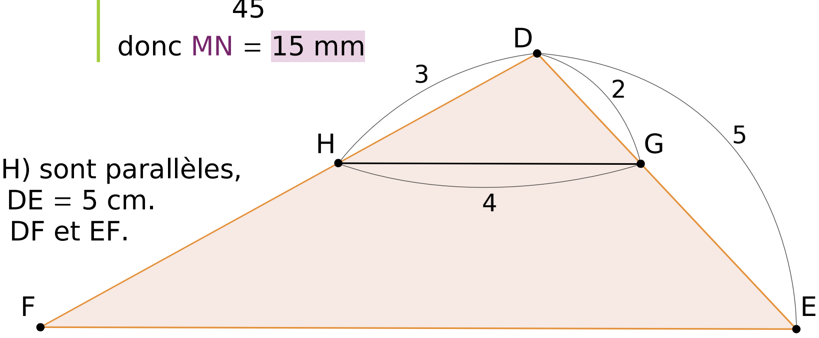
$\frac{25}{45} = \frac{MN}{27}$ donc $45 \times MN = 25 \times 27$

$MN = \frac{25 \times 27}{45}$

donc MN = 15 mm

Exemple 2 :

Dans cette figure, les droites (EF) et (GH) sont parallèles,
DG = 2 cm ; DH = 3 cm ; GH = 4 cm et DE = 5 cm.
On cherche à déterminer les longueurs DF et EF.



▶ Dans le triangle DEF, G ∈ [DE], H ∈ [DF] et les droites (EF) et (GH) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Longueur des côtés du triangle DGH	DH = 3 cm	DG = 2 cm	GH = 4 cm
Longueur des côtés du triangle DEF	DF = 3 cm × 2,5	DE = 5 cm	EF = 4 cm × 2,5

× 2,5

Ainsi, on obtient : DF = 7,5 cm et EF = 10 cm.

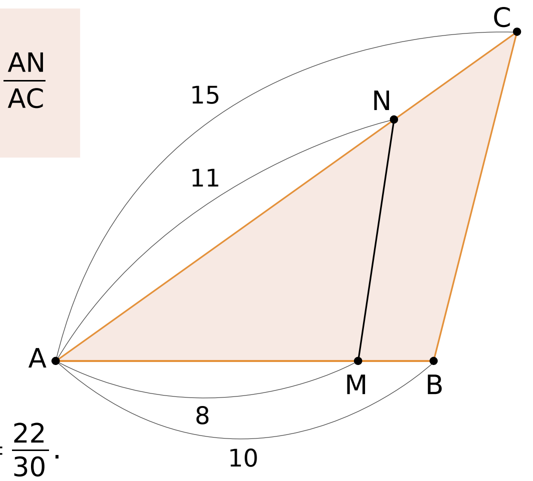
Remarque : Le triangle DEF est un agrandissement de rapport 2,5 du triangle DGH.

D Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

Théorème

Si, dans un triangle ABC, M ∈ [AB], N ∈ [AC] et $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$

alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.



Exemple :

Dans cette figure qui n'est pas en vraie grandeur,
AN = 11 cm ; AM = 8 cm ; AC = 15 cm et AB = 10 cm.

Dans le triangle ABC, M ∈ [AB] et N ∈ [AC].

On calcule séparément les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

D'une part, $\frac{AM}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{24}{30}$. D'autre part, $\frac{AN}{AC} = \frac{11}{15} = \frac{22}{30}$.

On constate que $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$.

Or, si les droites (BC) et (MN) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, il y aurait égalité.
Comme ce n'est pas le cas, les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

3 Le théorème réciproque de Thalès

A Réciproque du théorème de Thalès

Théorème

Si, dans un triangle ABC, M ∈ [AB], N ∈ [AC] et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Remarque :

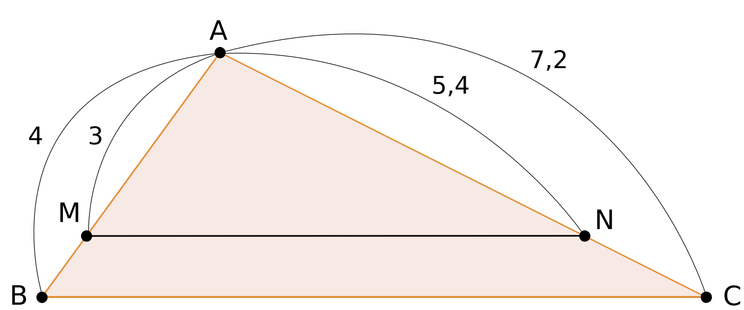
Attention, il ne suffit pas de vérifier l'égalité des rapports.
Il faut aussi s'assurer que les points sont placés dans le bon ordre.

B Démontrer que deux droites sont parallèles

La réciproque du théorème de Thalès permet, dans une configuration où l'on connaît certaines longueurs, de déterminer si des droites sont parallèles.

Exemple :

Dans cette figure, AM = 3 cm ; AB = 4 cm ; AC = 7,2 cm et AN = 5,4 cm.



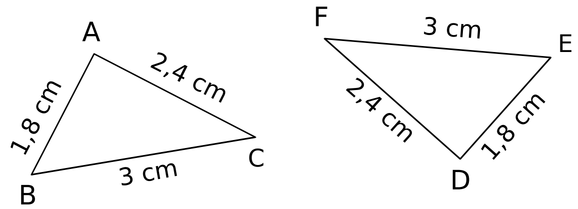
Dans le triangle ABC, M ∈ [AB] et N ∈ [AC]. On calcule séparément les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

D'une part, $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$. D'autre part, $\frac{AN}{AC} = \frac{5,4}{7,2} = \frac{54}{72} = \frac{\cancel{18} \times 3}{\cancel{18} \times 4} = \frac{3}{4}$.

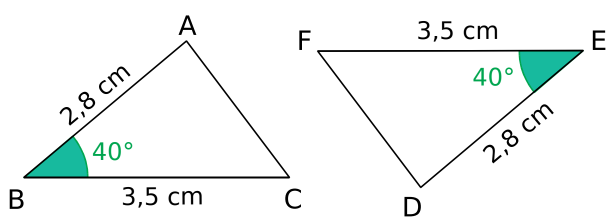
On constate que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès,
les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

1 Dans chaque cas, justifie l'égalité des triangles ABC et DEF.

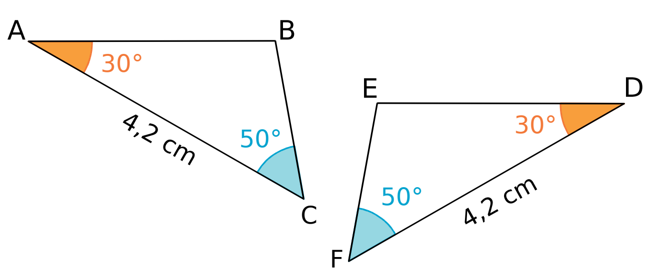
a.



b.

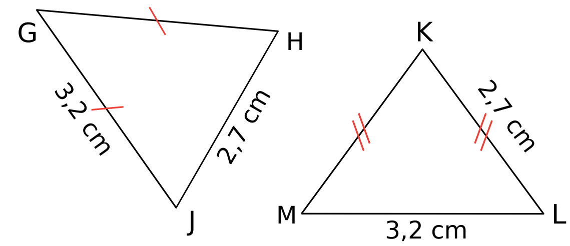


c.

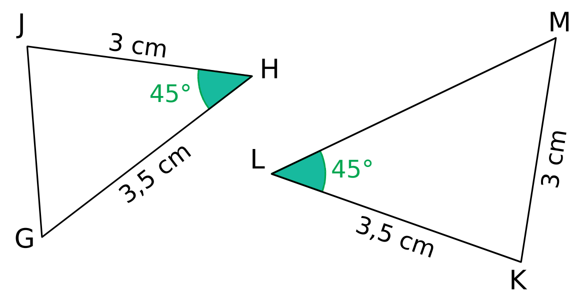


2 Dans chaque cas, explique pourquoi les triangles GHJ et KLM ne sont pas égaux.

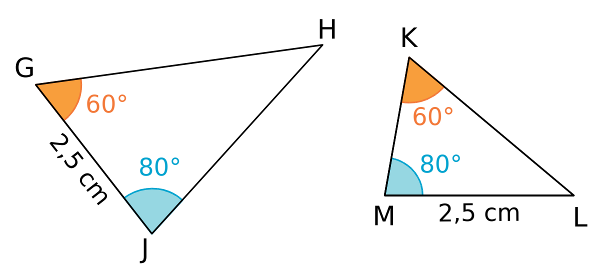
a.



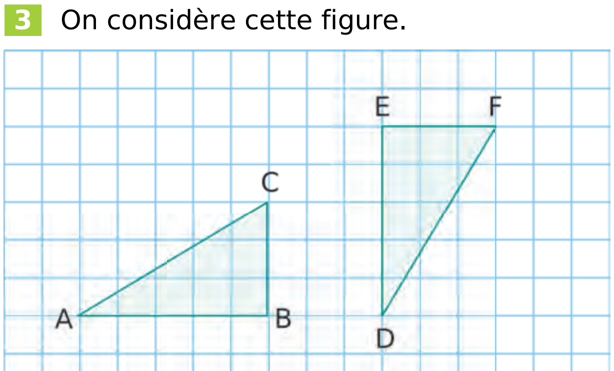
b.



c.



3 On considère cette figure.

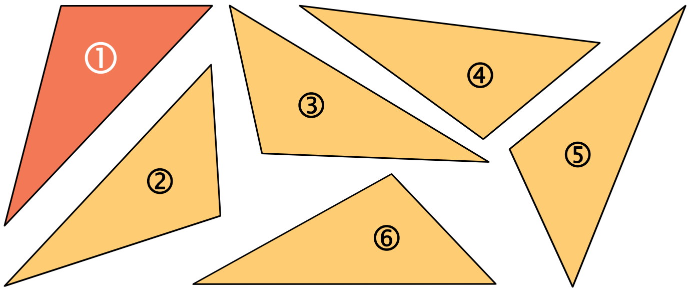


a. Pourquoi peut-on affirmer que les triangles ABC et DEF sont isométriques ?

b. Code les côtés de même longueur et les angles de même mesure.

Fiche 2 : utiliser les cas d'égalité de triangles (2)

1 Tous ces triangles sont égaux.



a. Quels triangles sont superposables au triangle ① par glissement ?

....

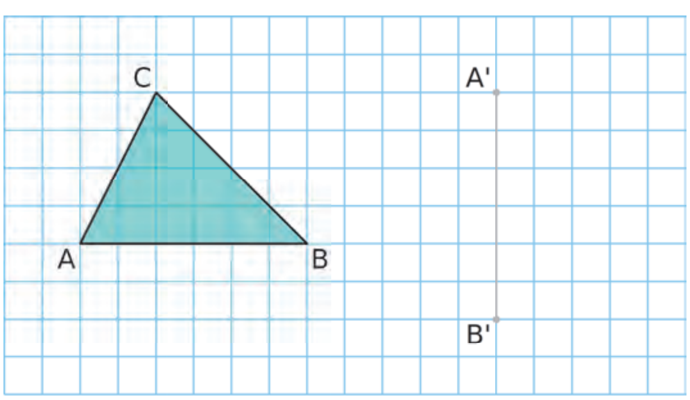
b. Quels triangles sont superposables au triangle ① par glissement, puis retournement ?

....

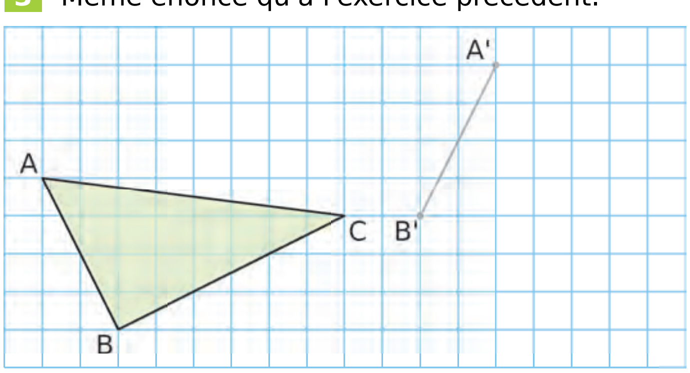
c. À l'aide du compas, construis un triangle égal au triangle ①, superposable...

• par glissement :	• par glissement puis retournement :

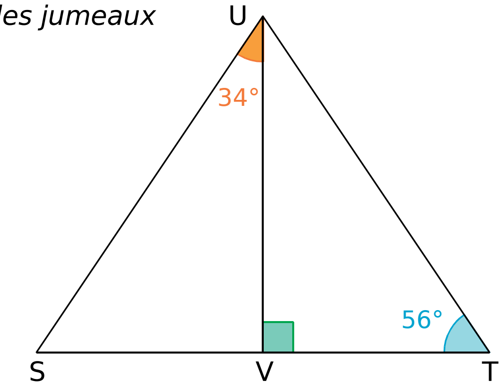
2 Construis un triangle A'B'C' égal au triangle ABC à partir du côté [A'B']. Les deux solutions seront tracées avec des couleurs différentes.



3 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.



4 *Triangles jumeaux*



a. Explique pourquoi les triangles SUV et TUV sont égaux.

....

....

....

....

....

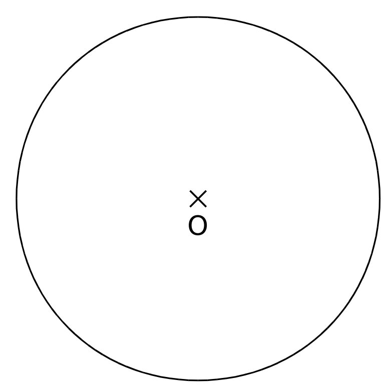
b. Quelle est la nature du triangle SUT ? Justifie.

....

....

....

5 Soit un cercle (𝒞) de centre O.



a. Trace deux diamètres [AB] et [CD].

b. Justifie que les triangles AOC et BOD sont égaux.

....

....

....

....

....

c. Que peut-on en déduire pour les segments [AC] et [BD] ?

....

....

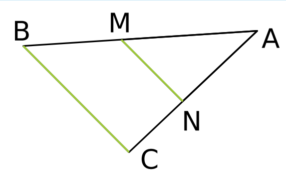
....

1 Complète les pointillés pour que les rapports soient égaux.

a. $\frac{4}{5} = \frac{\ldots\ldots}{7{,}5}$	**b.** $\frac{9}{12} = \frac{6}{\ldots\ldots}$	**c.** $\frac{\ldots\ldots}{4{,}2} = \frac{5}{6}$	**d.** $\frac{7}{\ldots\ldots} = \frac{10{,}5}{15}$	**e.** $\frac{3}{8} = \frac{\ldots\ldots}{12}$	**f.** $\frac{2{,}4}{3} = \frac{4}{\ldots\ldots}$
g. $\frac{\ldots\ldots}{14} = \frac{7{,}5}{10{,}5}$	**h.** $\frac{2{,}1}{\ldots\ldots} = \frac{3}{7}$	**i.** $\frac{7}{11} = \frac{\ldots\ldots}{9{,}9}$	**j.** $\frac{7{,}8}{\ldots\ldots} = \frac{6}{6{,}5}$	**k.** $\frac{4{,}5}{6} = \frac{36}{\ldots\ldots}$	**l.** $\frac{4{,}7}{6{,}3} = \frac{\ldots\ldots}{32{,}76}$

2 Les droites en vert sont parallèles. Retrouve, pour chaque figure, les deux triangles et les deux droites parallèles puis écris l'égalité de rapports correspondante.

a.



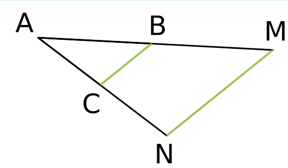
Petit triangle : …………

Grand triangle : …………

Droites : (…………) // (…………)

$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

b.



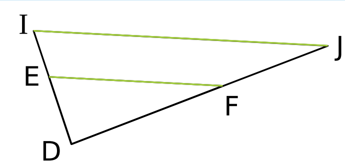
Petit triangle : …………

Grand triangle : …………

Droites : (…………) // (…………)

$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

c.



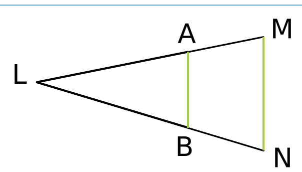
Petit triangle : …………

Grand triangle : …………

Droites : (…………) // (…………)

$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

d.



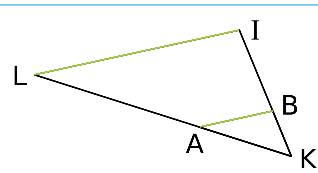
Petit triangle : …………

Grand triangle : …………

Droites : (…………) // (…………)

$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

e.



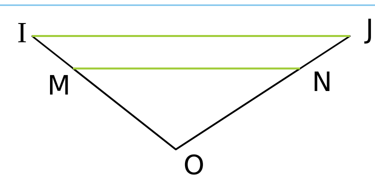
Petit triangle : …………

Grand triangle : …………

Droites : (…………) // (…………)

$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

f.



Petit triangle : …………

Grand triangle : …………

Droites : (…………) // (…………)

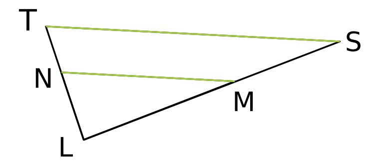
$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

3 En te référant à l'exercice **2**, écris puis résous l'équation permettant de retrouver le côté manquant.

a. AM = 5 ; AB = 6 ; AC = 7,2 Calcule AN. $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ donc AN = ……	**b.** AB = 2 ; AC = 2,5 ; AM = 8 Calcule AN. $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ donc AN = ……	**c.** DE = 7 ; DF = 8 ; DI = 8,4 Calcule DJ. $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ donc DJ = ……
d. LB = 3 ; LN = 18 ; AB = 2 Calcule MN. $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ donc MN = ……	**e.** KA = 9 ; KL = 11 ; LI = 16,5 Calcule AB. $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ donc AB = ……	**f.** OI = 6 ; OM = 1,5 ; IJ = 4,4 Calcule MN. $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ donc MN = ……

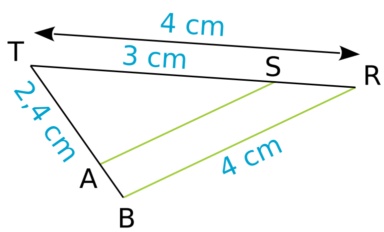
Fiche 4 : appliquer le théorème de Thalès (2)

1 Les droites (NM) et (ST) sont parallèles. Complète ce tableau de proportionnalité.



	Longueurs... LM	LN	MN
Triangle LMN		4	10
Triangle LST	12,8	6,4	
	LS	LT	ST

2 Les droites (AS) et (BR) sont parallèles. On veut calculer AS et TB. Complète les pointillés.



Dans le triangle BRT, S ∊ [TR], ... ∊ .... et

(AS) .... (BR). Donc, d'après le théorème de Thalès,

on a : $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

soit $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

Calcul de TB :

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

soit TB = $\frac{\dots\dots \times \dots\dots}{\dots\dots}$

Donc TB = ... cm.

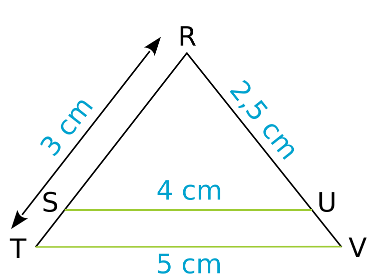
Calcul de AS :

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

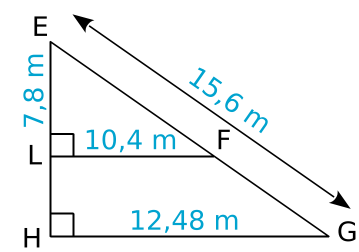
soit AS = $\frac{\dots\dots \times \dots\dots}{\dots\dots}$

Donc AS = ... cm.

3 Les droites SU et TV sont parallèles. Calcule RS et RV.



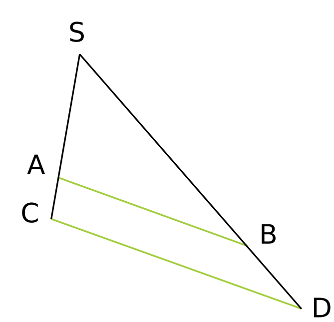
4 On considère la figure ci-contre.



a. Que dire des droites (LF) et (HG) ?

b. Calcule EH et EF.

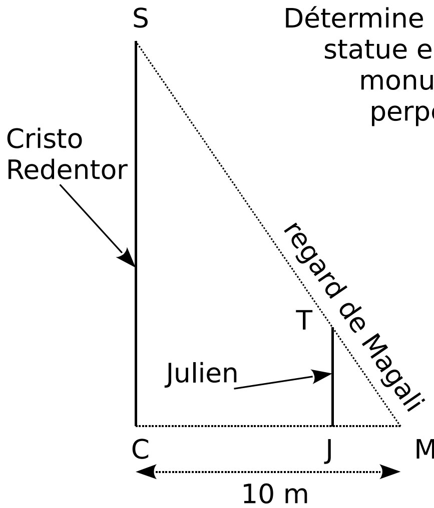
5 Les droites (AB) et (CD) sont parallèles. SA = 3 cm, AB = 4 cm et CD = 5,5 cm.



a. Place les mesures sur la figure.

b. Calcule la longueur SC. Tu arrondiras le résultat au millimètre.

1 Cristo Redentor, symbole brésilien, est une grande statue dominant la ville de Rio qui s'érige au sommet du mont Corcovado. Au pied du monument, Julien et Magali souhaitent mesurer la hauteur de la statue (socle compris). Julien, qui mesure 1,90 m, se place debout à quelques mètres devant la statue. Magali place le regard au niveau du sol de telle manière qu'elle voie le sommet du Cristo (S) et celui de la tête de Julien (T) alignés ; elle se situe alors à 10 m de la statue et à 50 cm de Julien. La situation est modélisée ci-dessous par la figure qui n'est pas à l'échelle.



Détermine la hauteur SC de la statue en supposant que le monument et Julien sont perpendiculaires au sol.

....

....

....

....

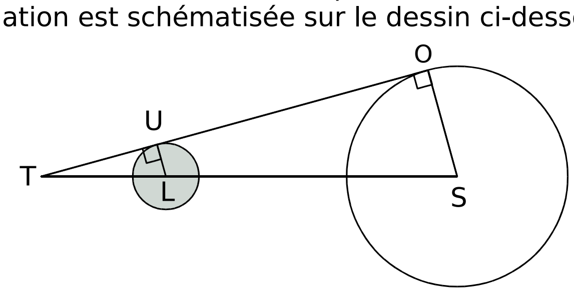
....

....

....

....

2 Tom observe une éclipse de Soleil. Cette situation est schématisée sur le dessin ci-dessous.



Tom se trouve au point T, le point S représente le centre du Soleil et le point L le centre de la Lune.

Les points T, L et S sont alignés.

Le rayon du Soleil SO mesure environ 695 000 km ; le rayon de la Lune LU mesure environ 1 736 km.

La distance TS est égale à 150 millions de km.

Calcule la distance TL. Tu donneras l'arrondi au kilomètre.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

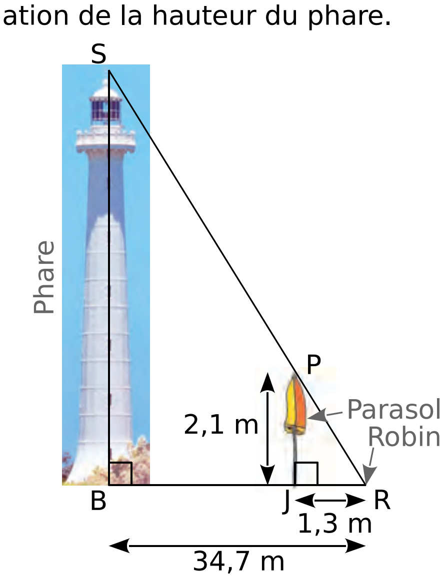
3 Pendant les vacances, Robin est allé visiter le phare Amédée. Lors d'une sieste sur la plage, il a remarqué que le sommet d'un parasol était en parfait alignement avec le sommet du phare. Robin a donc pris quelques mesures et a décidé de faire un schéma de la situation dans le sable pour trouver une estimation de la hauteur du phare.

Les points B, J et R sont alignés.

(SB) et (BR) sont perpendiculaires.
(PJ) et (BR) sont perpendiculaires.

Quelle hauteur, arrondie au mètre, va-t-il trouver à l'aide de son plan ?

Justifie la réponse.



....

....

....

....

....

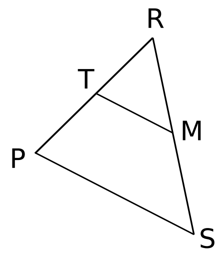
....

....

....

1 Sur la figure ci-contre, RM = 4 cm ; RS = 5 cm ; RT = 6 cm et RP = 7,5 cm. Les points R, T et P sont alignés, ainsi que les points R, M et S.

On veut montrer que les droites (MT) et (SP) sont parallèles.



a. Compare les rapports $\frac{RM}{RS}$ et $\frac{RT}{RP}$.

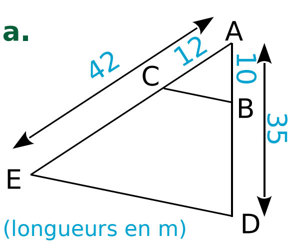
$\frac{RM}{RS}$ = ……………………… | $\frac{RT}{RP}$ = ………………………

b. Précise la disposition des points.

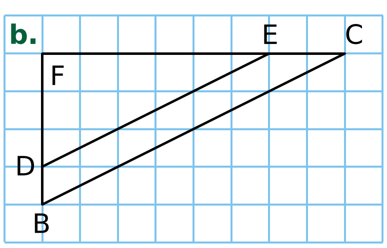
c. Conclus.

2 Dans chaque cas, démontre que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

a.

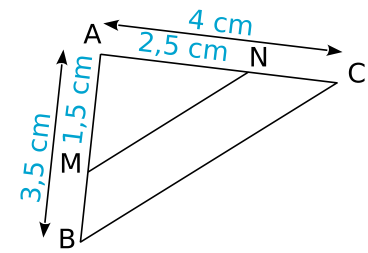


b.



3 Les points A, M, B sont alignés, ainsi que les points A, N et C.

On veut montrer que les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.



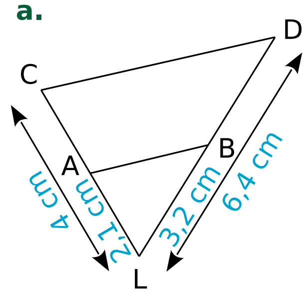
a. Calcule et compare les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

$\frac{AM}{AB}$ = ……………………… | $\frac{AN}{AC}$ = ………………………

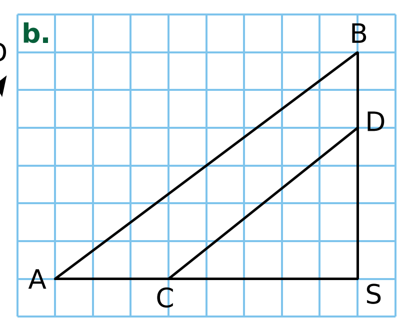
b. Conclus.

4 Dans chaque cas, démontre que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

a.



b.

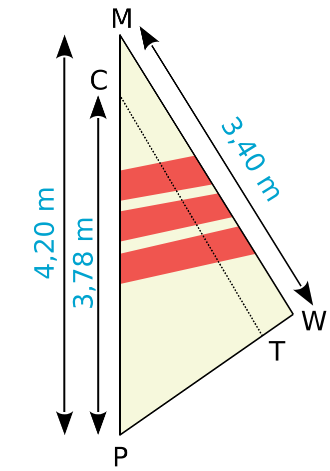


Fiche 7 : démontrer que deux droites sont ou ne sont pas parallèles (2)

1 Un centre nautique souhaite effectuer une réparation sur une voile. La voile a la forme du triangle PMW ci-contre.

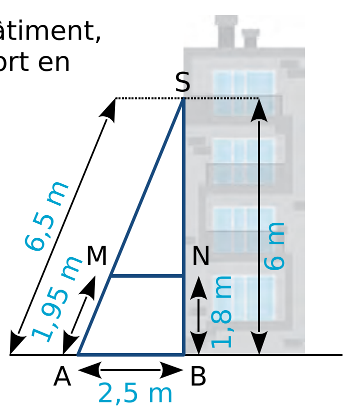
On souhaite faire une couture suivant le segment [CT]. Une fois la couture terminée, on mesure PT = 1,88 m et PW = 2,30 m.

La couture est-elle parallèle à (MW) ?



2 Pour consolider un bâtiment, on a construit un contrefort en bois (dessin ci-contre). Le montant [BS] est perpendiculaire au sol.

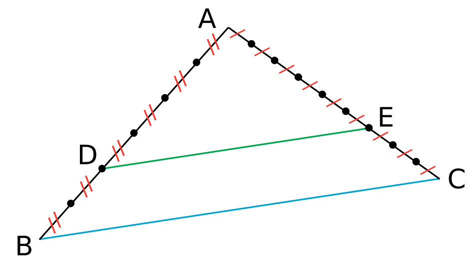
On donne :
BS = 6 m ;
BN = 1,8 m ;
AM = 1,95 m ;
AS = 6,5 m ;
AB = 2,5 m.



a. Calcule les longueurs SM et SN.

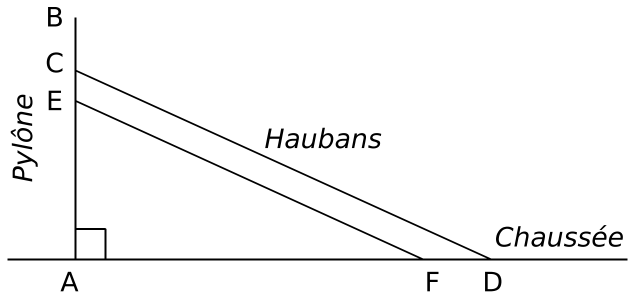
b. Démontre que la traverse [MN] est bien parallèle au sol.

3 Les droites (DE) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifie.



4 Le viaduc de Millau est un pont franchissant la vallée du Tarn, dans le département de l'Aveyron, en France. Il est constitué de 7 pylônes verticaux équipés chacun de 22 câbles appelés haubans.

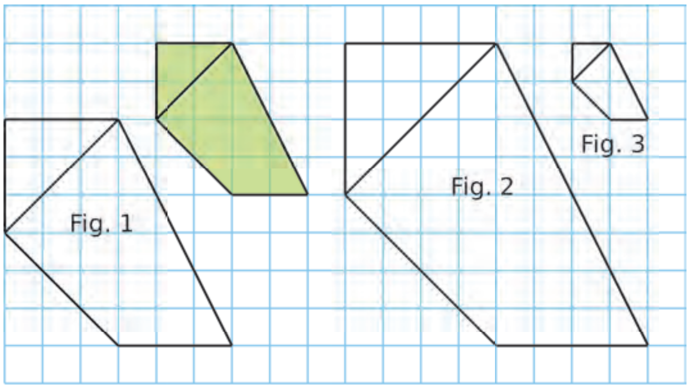
Le schéma ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle, représente un pylône et deux de ses haubans.



On dispose des informations suivantes :
AB = 89 m ; AC = 76 m ; AD = 154 m ;
FD = 12 m et EC = 5 m.

Les haubans [CD] et [EF] sont-ils parallèles ?

1 Compare chaque figure à la figure verte.



	Agrandissement	Réduction	Rapport
Fig. 1			
Fig. 2			
Fig. 3			

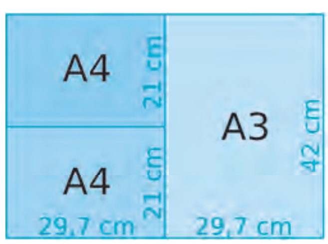
2 Quel rapport, arrondi au dixième, doit-on saisir sur la photocopieuse pour passer...

a. d'un format A3 à un format A4 ?

....

b. d'un format A4 à un format A3 ?

....



3 Un carré a pour côté 6 cm.

a. Quelle est l'aire de ce carré ?

....

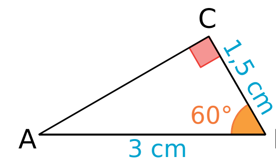
b. On considère des agrandissements et des réductions de ce carré. Complète le tableau.

Rapport	Côté du carré	Aire du carré
$\frac{1}{6}$		
3		
$\frac{3}{4}$		
$\frac{4}{3}$		

c. Complète le tableau ci-dessous en indiquant le nombre par lequel il faut multiplier l'aire du carré pour obtenir celle du carré agrandi ou réduit.

Rapport	$\frac{1}{6}$	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
Nombre				

4 On considère ce triangle ABC.



a. Construis...

• une réduction A'B'C' du triangle ABC de rapport 0,8.	• un agrandissement A''B''C'' du triangle ABC de rapport 1,4.

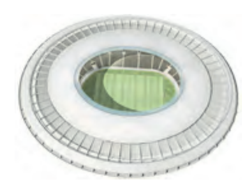
b. Quelle est la nature des triangles A'B'C' et A''B''C'' ? Justifie.

....

....

....

5 Inauguré en 1950, le stade Maracanà est un lieu mythique, place de grands évènements sportifs tels que la Coupe du monde 2014 ou les Jeux olympiques 2016.



C'est une structure de forme ovale, de dimensions 317 m et 279 m pour une hauteur de 32 m, dont la surface au sol est d'environ 69 500 m^2.
Sur la célèbre plage de Copacabana, à Rio, on peut admirer de nombreuses sculptures de sable. L'un des sculpteurs souhaite réaliser une reproduction du stade à l'échelle 1/300.

a. Quelles seront les dimensions, arrondies au centimètre, de cette reproduction ?

....

....

....

....

....

b. Quelle en sera la superficie ? Tu donneras le résultat en m^2, arrondi au centième.

....

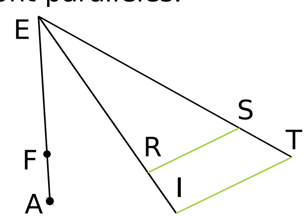
....

....

....

1 Les droites (RS) et (IT) sont parallèles.
RS = 2,8 cm ; IT = 4,4 cm ;
EF = 2,1 cm ; EA = 3,3 cm.

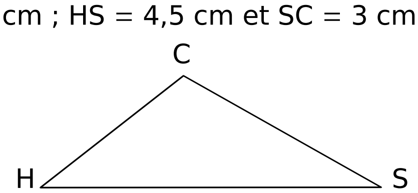
La figure n'est pas en vraie grandeur.



a. Calcule le rapport $\frac{ER}{EI}$.

b. Montre que (FR) et (AI) sont parallèles.

2 On considère le triangle CHS tel que :
CH = 2,4 cm ; HS = 4,5 cm et SC = 3 cm.

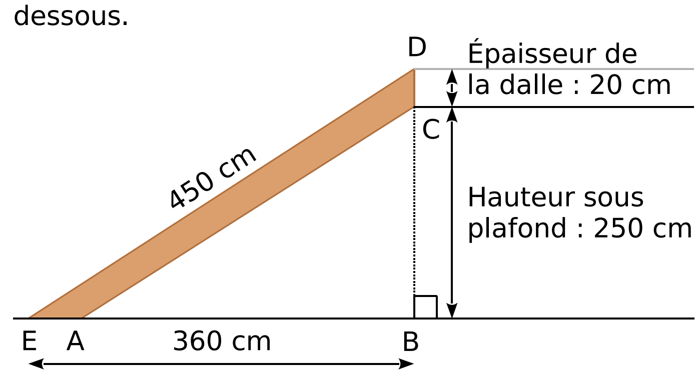


a. Place le point A sur [CH] tel que CA = 3,2 cm ; et le point T sur [CS] tel que CT = 4 cm.

b. Montre que (HS) et (AT) sont parallèles.

c. Calcule AT.

3 Germaine souhaite réaliser un escalier pour monter à l'étage de son appartement. Elle a besoin pour cela de connaitre les dimensions du limon (planche dans laquelle viendront se fixer les marches de cet escalier). Elle réalise le croquis ci-dessous.



Sur ce croquis :

- le limon est représenté par le quadrilatère ACDE ;
- les droites (AC) et (ED) sont parallèles ;
- les points E, A et B sont alignés ;
- les points B, C et D sont alignés.

Calcule les deux dimensions AC et AE de cette planche. Arrondis les résultats au centimètre.