Le calcul littéral

M. LE GRUIEC

9 mars 2025

1. Rappels

1. Rappels

Définition

- Le calcul **numérique** c'est du calcul avec uniquement des **nombres**.
- Le calcul **littéral** c'est du calcul qui fait intervenir une ou des **lettres**.

Exemples

- On veut calculer l'aire d'un carré de côté 4 cm. L'aire est donnée par $\mathcal{A} = 4 \times 4 = 16$ cm^2 $\rightarrow$ c'est du **calcul numérique**.
- On veut maintenant donner une formule générale. Soit x un nombre positif (quelconque). L'aire du carré de côté x est donnée par $\mathcal{A} = x \times x = x^2$ $\rightarrow$ c'est du **calcul littéral**.
- Soient x et y deux nombres positifs. L'aire du rectangle de longueur x et largeur y est donnée par $\mathcal{A} = x \times y$ et le périmètre par $\mathcal{P} = 2x + 2y$ $\rightarrow$ c'est du **calcul littéral**.

2. Simplifier une expression littéral

2. Simplifier une expression littéral

Proposition

- On peut supprimer le signe « $\times$ » devant une lettre ou une parenthèse.
- On peut regrouper les termes faisant intervenir les mêmes lettres.

Exemples

- $7 \times x \times y \times z$ sera noté simplement $7xyz$.
- $2 \times (x + y \times z)$ sera noté simplement $2(x + yz)$.
- attention, $4 \times 5 \neq 45$.

Exemples

- $5x + 2x = (5 + 2)x = 7x$. Si on pose x=pomme, on dit simplement que $5\,\text{pommes} + 2\,\text{pommes} = 7\,\text{pommes}$.
- $A = x - 7yz + 3x + 2yz$
  $A = (1 + 3)x + (-7 + 2)yz$
  $A = 4x - 5yz$

Exercice

Réduire l'expressions $A = 4 - 2 \times x + 3 \times x \times y - 5 \times 3 \times x + 6 \times x \times (-2) + (-7) \times (-1)$

Correction

$A = 4 - 2 \times x + 3 \times x \times y - 5 \times 3 \times x + 6 \times x \times (-2) + (-7) \times (-1)$

$A = 4 - 2x + 3xy - 15x - 12x + 7$

$A = 3xy - 2x - 15x - 12x + 4 + 7$

$A = 3xy - 29x + 11$

3. Évaluer une expression littérale

3. Évaluer une expression littérale

Définition

Évaluer une expression littérale, c'est calculer sa valeur numérique lorsque la ou les variables sont remplacées par des valeurs numériques.

Exemples

- L'aire d'un disque de rayon $r \geqslant 0$ est donnée par $\mathcal{A} = \pi r^2$. L'aire du disque du rayon 6 cm est $\mathcal{A} = \pi \times 6 \times 6 = 36\pi$ cm^2.
- Le périmètre d'un rectangle de longueur x et largeur y est $\mathcal{P} = 2x + 2y$. Pour $x = 6$ cm et $y = 4$ cm, on obtient $\mathcal{P} = 2 \times 6 + 2 \times 4 = 20$ cm.

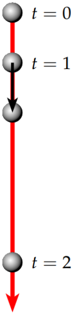
Le coin des erreurs

- Quand on demande d'évaluer l'expression $2y$ pour $y = 4$, il faut se rappeler qu'entre le 2 et le y il y une multiplication. Le résultat est donc $2 \times 4 = 8$ et non 24.

Exemple (avec une variable)

On lâche (sans vitesse initiale) une pièce du haut de l'Empire State Building dont la hauteur est de 381 m. Sans tenir compte de la résistance avec l'aire lors de la chute, la pièce tombe verticalement et on peut montrer que la distance parcourue par la pièce t secondes après le lâcher est donnée par l'expression :

$$d(t) = 5t^2$$



1. Donner la distance parcourue par la pièce 1 seconde après l'avoir lâchée.
2. Et 2 secondes après ?
3. Propose deux manières différentes pour trouver le temps au bout duquel la pièce va toucher le sol.

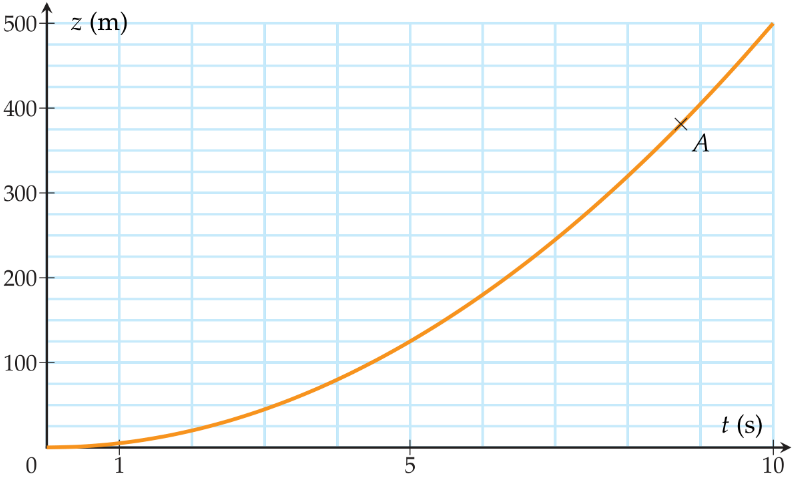
Correction

1. On évalue l'expression $d(t)$ et $t = 1$ et a donc $d(1) = 5 \times 1^2 = 5$ m.
2. De même, $d(2) = 5 \times 2^2 = 5 \times 4 = 20$ m.
3. Une **première méthode** naïve consisterait à chercher le moment t pour lequel on a $d(t) = 381$ avec une précision acceptable. On pourra suivant cette méthode procéder par dichotomie, en remarquant par exemple que $d(8) = 320 < 381$ et que $d(9) = 405 > 381$, donc l'instant cherché est entre 8 et 9 secondes. Puis on affine successivement, $d(8{,}5) = 361{,}25 < 381$ donc la pièce touche le sol entre 8,5 et 9 secondes, etc. Une **deuxième méthode** consisterait à résoudre directement l'équation

$$d(t) = 381 \quad \text{soit} \quad 5t^2 = 381 \quad \text{soit} \quad t = \sqrt{\frac{381}{5}} \simeq 8{,}73 \text{ s.}$$

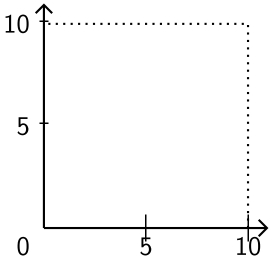
✌

Représentation graphique de d et fonction de t



Exemple (avec deux variables)

Un toit carré en tôle de 10 m sur 10 m est soumis à une source de chaleur (soleil par exemple). On modélise ce toit par un l'ensemble des points (x,y) du plan pour x et y allant de 0 à 10.



La température (en C°) du toit est donnée en chaque point de coordonnée (x,y) par

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + x + y$$

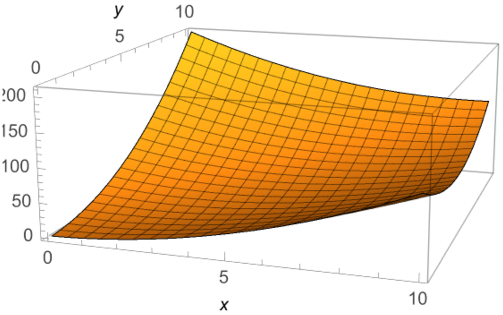
Question : Donner la température au milieu du toit.

Correction

Il s'agit d'évaluer l'expression en $(x,y) = (5{,}5)$. On obtient

$$T(5{,}5) = 5^2 + 2 \times 5^2 - 2 \times 5 \times 5 + 5 + 5 = 75 - 50 + 10 = 35 \text{ C}^\circ$$

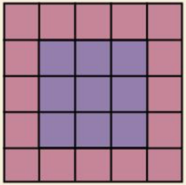
Avec un logiciel de calcul, on peut tracer une nappe en 3D qui donne la température du toit en tout point :



4. Produire une expression littérale

Activité : produire une expression littérale

PARTIE 1 : À tâtons



Une partie du dessin qu'elle voudrait reproduire sur les fenêtres est représenté par le motif ci-contre.

Yasmine veut reproduire en grand ce carré, plusieurs fois et à des endroits différents. Elle souhaiterait donc trouver une méthode de calcul qui lui permette de déterminer à coup sûr le nombre de Post-it roses à coller, quel que soit le nombre de carreaux qui constituent le côté du carré.

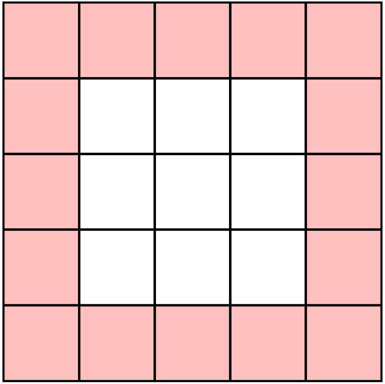
a. Si le côté du carré vaut 5, de combien de Post-it roses a-t-on besoin ?

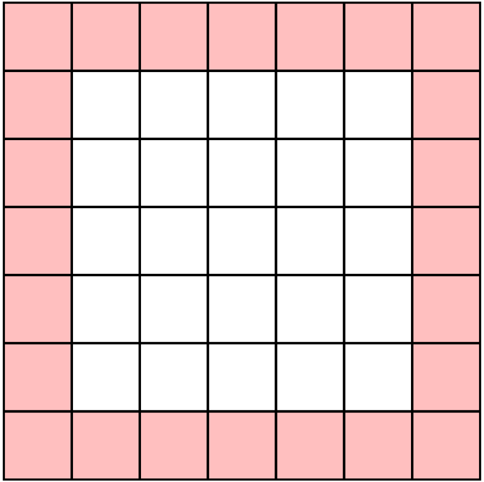
b. Et si le côté vaut 7 ? Et s'il vaut 9 ?

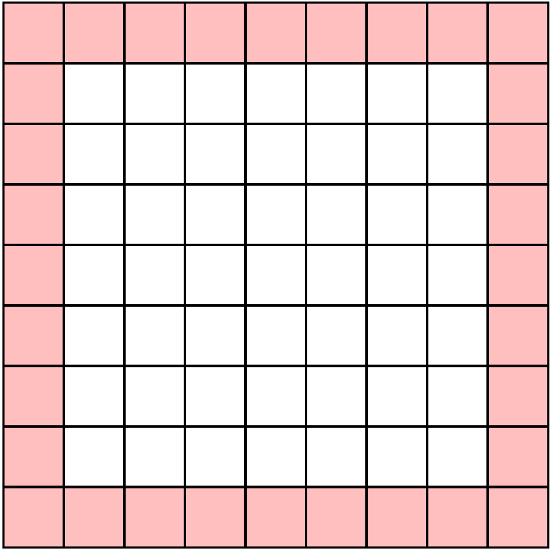
c. À partir de ces calculs, comment retrouve-t-on le nombre de carrés roses à partir du nombre de carrés qui composent le côté ?

> **Coup de pouce :** Utilisez une lettre pour nommer le nombre de carrés de chaque côté. Écrivez une expression qui donne le nombre total de carrés roses en fonction de cette lettre.

Vous venez d'écrire une « expression littérale », c'est-à-dire une expression qui comporte une lettre. Cette lettre est appelée une « variable ».

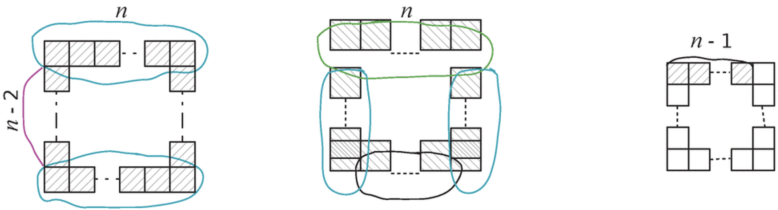






Éléments de réponse

- On trouve respectivement 16, 24 puis 32 carrés roses.
- L'idée est de se dire que plus la taille du carré augmente, plus il devient compliqué de compter le nombre de carrés roses.
- On remarque cependant que l'on peut calculer astucieusement le nombre de carrés roses et qu'il y a même plusieurs découpages astucieux !



et un dernier qui consiste à faire le nombre de petits carrés du grand carré auquel on soustrait le nombre de petits carrés intérieurs.

- Ces découpages permettent de trouver rapidement le nombre de carrés roses en fonction de la taille n du côté du carré. On trouve respectivement :
  - $2n + 2(n-2)$
  - $n + 2(n-1) + n - 2$
  - $4(n-1)$
  - $n^2 - (n-2)^2$
- Ces quatre expressions, bien que visuellement différentes, sont égales ; elles donnent toutes le nombre de carrés roses. Vous pouvez les évaluer en 5, 7 et 9 pour tomber sur les réponses trouvées à la première question.
- On peut maintenant répondre à deux questions beaucoup plus complexes comme « Combien y a-t-il de carrés roses sur le carré original ? » ou bien « Je dispose de 156 post-it roses, quelle est la plus grande taille de motif que je puisse faire ? »

Synthèse de l'activité

- Pour généraliser un problème, il est possible de **produire une expression littérale.**
- Un même problème peut avoir plusieurs expressions littérales. **Deux expressions littérales sont égales si elles prennent toujours la même valeur** quand on remplace les lettres par n'importe quel nombre.

Méthode

- Pour démontrer que deux expressions littérales sont égales pour tout nombre x, on peut transformer l'écriture de l'une pour obtenir l'écriture de l'autre.
- Pour démontrer que deux expressions littérales ne sont pas égales pour tout nombre x, il suffit de trouver une valeur de x pour laquelle les deux expressions littérales ne sont pas égales.

Exemples

- Les expressions $2 + 8x - 1 - 2$ et $6x + 1$ sont-elles égales ?

Correction.

$$\begin{aligned} 2 + 8x - 1 - 2x &= 8x - 2x + 2 - 1 \\ &= 6x + 1 \end{aligned}$$

Donc l'égalité est vraie pour tout nombre x.

- Les expressions $3x + 7$ et $10x$ sont-elles égales ?

Correction.

Si $x = 0$ (par exemple), alors $3x + 7 = 7$ et $10x = 0$, donc $3x + 7 \neq 10x$.

Donc l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre x.

5. Programme de calcul

5. Programme de calcul

Extrait du brevet d'Asie 2022

Situation 1 :

On considère le programme de calcul ci-contre :

Nombre de départ

↓

Soustraire 7.
Multiplier par 5.
Soustraire le double du nombre de départ.

↓

Résultat

1) Montrer que si le nombre de départ est 10, le résultat obtenu est -5.

2) On note x le nombre de départ auquel on applique ce programme de calcul. Parmi les expressions suivantes, quelle est celle qui correspond au résultat du programme de calcul ? *Aucune justification n'est attendue pour cette question.*

Expression A : $x - 7 \times 5 - 2x$ Expression B : $5(x-7) - 2x$

Expression C : $5(x-7) - x^2$ Expression D : $5x - 7 - 2x$

Extrait du brevet d'Asie 2022

<u>Situation 1</u> :

On considère le programme de calcul ci-contre :

Nombre de départ

↓

Soustraire 7.
Multiplier par 5.
Soustraire le double du nombre de départ.

↓

Résultat

1) Montrer que si le nombre de départ est 10, le résultat obtenu est -5.

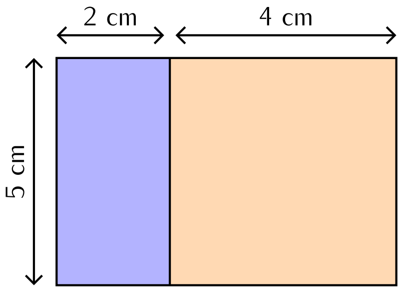
2) On note x le nombre de départ auquel on applique ce programme de calcul.
Parmi les expressions suivantes, quelle est celle qui correspond au résultat du programme de calcul ? *Aucune justification n'est attendue pour cette question.*

Expression A : $x - 7 \times 5 - 2x$ Expression B : $5(x-7) - 2x$
Expression C : $5(x-7) - x^2$ Expression D : $5x - 7 - 2x$

6. La simple distributivité

Étape 1

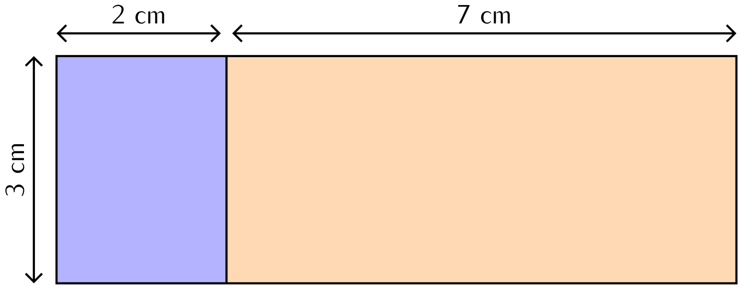
On considère le rectangle ci-dessous subdivisé en deux rectangles plus petits.



Question 1. Sans faire les calculs, exprime de deux manières différentes l'aire du grand rectangle.

Étape 2

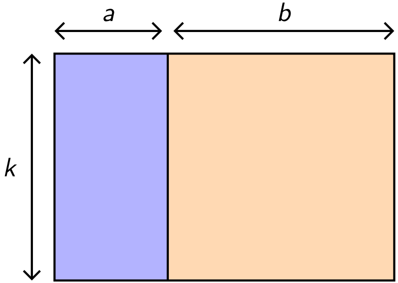
On considère le rectangle ci-dessous subdivisé en deux rectangles plus petits.



Question 2. Sans faire les calculs, exprime de deux manières différentes l'aire du grand rectangle.

Étape 3

Soient k, a et b des nombres positifs (pour que la figure ait un sens) quelconques.



Question 3. Exprime de deux manières différentes l'aire du grand rectangle.

Définition

Développer c'est transformer un produit en somme.

Théorème : la simple distributivité ♡

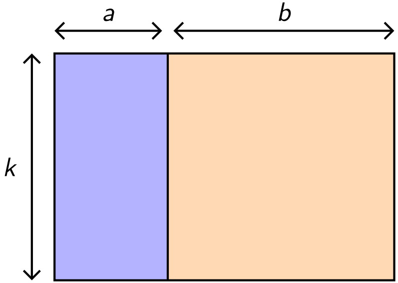
Soient k, a et b des nombres quelconques,

$$k\,(a + b) = ka + kb$$

Remarques

- On dit que la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition.
- Les signes « $\times$ » sont ici sous-entendus : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

Interprétation géométrique de la simple distributivité



$$k(a+b) = {\color{blue}ka} + {\color{orange}kb}$$

« L'aire du grand rectangle est égale à la somme des aires des deux petits. »

Exemples

Développer les expressions suivantes.

- $2(x+4)$
- $7(3x-6)$
- $-3(y-1)$
- $2(y-2z+3t)$

Correction

- $2(x+4) = 2x + 2 \times 8 = 2x + 8$
- $7(3x-6) = 7 \times 3x - 7 \times 6 = 21x - 42$
- $-3(y-1) = -3y + 3$
- $2(y-2z+3t) = 2y - 4z + 6t$

À chaque distribution on a besoin d'être à l'aise avec la **règle des signes**.

Exemple détaillé :

$$\begin{aligned} 2(y-2z+3t) &= 2\left(y + (-2z) + 3t\right) \\ &= 2 \times y + 2 \times (-2z) + 2 \times 3t \\ &= 2y + (-4z) + 6t \\ &= 2y - 4z + 6t \end{aligned}$$

7. Supprimer des parenthèses

Activité

1. Le professeur de mathématiques de Téa lui demande de développer l'expression $E = -(3x - 7)$. Pour l'aider à développer cette expression, il lui propose de compléter les égalités suivantes.

$$-3 = \ldots \times 3$$
$$-x = \ldots \times x$$
$$-(x + 5) = \ldots \times (x + 5)$$

   Quel nombre peut-on mettre à la place des pointillés pour que les égalités soient vraies ?

2. En faisant apparaître ce nombre dans l'expression $E = -(3x - 7)$, la développer et la réduire.

3. Développe $F = -(x+4)$ et $G = -(-6x+3)$.

4. Le professeur demande ensuite à Jack de développer l'expression $H = -(-5x+4)$. Voici ce que Jack propose comme solution.

	$H = -(-5x+4)$
Étape 1	$H = -1 \times (-5x+4)$
Étape 2	$H = -1 \times (-5x) + (-1) \times 4$
Étape 3	$H = 5x - 4$

À l'aide des développements effectués aux questions 2. et 3. et de celui de Jack ci-dessus, proposer une astuce permettant de passer de l'étape 1 à l'étape 3 plus rapidement.

7. Supprimer des parenthèses

Proposition

- Les parenthèses précédées du signe + peuvent être supprimées sans transformer l'expression.

$$x + (y + z) = x + y + z$$

- Les parenthèses précédées du signe − peuvent être supprimées **à condition de changer les signes qui sont à l'intérieur**

$$x - (y + z) = x - y - z$$

Exemples

- $6 + (4 - t) = 6 + 4 - t$
- $y + (2y - 1) = y + 2y - 1 = 3y - 1$

Exemples

- $-(2x - 5y) = -2x + 5y$
- $x - (-2x + 5z) = x + 2x - 5z = 3x - 5z$

Exercice

Enoncé Réduire l'expression

$$E = -(4x + 7) + \left(4x^2 - 5\right) - \left(-2x - x^2\right).$$

Correction

$$E = -(4x + 7) + \left(4x^2 - 5\right) - \left(-2x - x^2\right)$$
$$E = -4x - 7 + 4x^2 - 5 + 2x + x^2$$
$$E = 5x^2 - 2x - 12$$

8. Factoriser une expression

Définition

Factoriser c'est transformer une somme (ou différence) en un produit.

- C'est donc l'opération inverse du développement.

Exemple

- $2x + 3x = x \times 2 + x \times 5 = x \times (2 + 5) = x \times 7 = 7x$

Nous avions déjà utilisé ce résultat pour des raisons pratiques, mais la justification est que nous factorisons par x ici.

Théorème

Soient k, a et b des nombres quelconques,

$$ka + kb = k(a+b)$$

▶ ***Remarque :*** C'est simplement l'égalité de simple distributivité lue dans le sens inverse.

développer

$$k(a+b) = ka + kb$$

factoriser

Exemples

Factoriser les expressions suivantes.

- $4x + 36$
- $12 - 14x$
- $11t - 6t^2$
- $14xy - 7x$

Correction

- $4x + 36 = 4 \times x + 4 \times 9 = 4(x + 9)$
- $12 - 14x = 2 \times 6 - 2 \times 7x = 2(6 - 7x)$
- $11t - 6t^2 = t(11 - 6t)$
- $14xy - 7x = 7x \times 2y - 7x = 7x(2y - 1)$

Exemples

Factoriser les expressions suivantes.

- $A(x) = (9x-4)(5x+6) + (9x-4)(3x+11)$
- $B(x) = (9x-4)(5x+6) - (9x-4)(3x+11)$

Correction

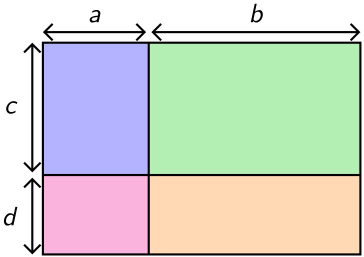
$$A(x) = (9x-4)(5x+6) + (9x-4)(3x+11)$$
$$A(x) = (9x-4)(5x+6) + (9x-4)(3x+11)$$
$$A(x) = (9x-4)[(5x+6) + (3x+11)]$$
$$A(x) = (9x-4)[5x+6+3x+11]$$
$$A(x) = (9x-4)(8x+17)$$

$$B(x) = (9x-4)(5x+6) - (9x-4)(3x+11)$$
$$B(x) = (9x-4)(5x+6) - (9x-4)(3x+11)$$
$$B(x) = (9x-4)[(5x+6) - (3x+11)]$$
$$B(x) = (9x-4)[5x+6-3x-11]$$
$$B(x) = (9x-4)(2x-5)$$

9. La double distributivité

Activité

Soient a, b, c et d des nombres positifs quelconques. On considère le rectangle ci-dessous subdivisé en quatre petits rectangles.



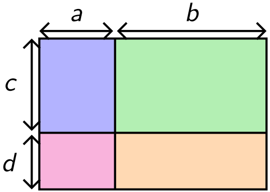
Question. En t'inspirant de l'activité sur la simple distributivité, exprime de deux manières différentes l'aire du grand rectangle.

Théorème : la double distributivité ♡

Soient a, b, c et d des nombres quelconques,

$$(a+b)(c+d) = {\color{blue}ac} + {\color{magenta}ad} + {\color{green}bc} + {\color{orange}bd}$$

▶ ***Interprétation géométrique***



« L'aire du grand rectangle de côté (a+b) et (c+d) est égale à la somme des aires des quatre petits rectangles »

Démonstration algébrique de la règle de double distributivité.

Il s'agit d'appliquer deux fois la simple distributivité. On pose $k = c + d$, on a donc

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= (a+b)k \\ &= ak + bk \\ &= a(c+d) + b(c+d) \\ &= ac + cd + bc + bd\end{aligned}$$

✌

Exemples

Développer et réduire les expressions suivantes.

- $(3x+1)(x+4)$
- $(3x+1)(y+4)$
- $(3x-1)(x-4)$
- $(x+2)(x^2+x+1)$

Correction

- $(3x+1)(x+4) = 3x^2 + 12x + x + 4 = 3x^2 + 13x + 4$
- $(3x+1)(y+4) = 3x \times y + 3x \times 4 + 1 \times y + 1 \times 4 = 3xy + 12x + y + 4$
- $(3x-1)(x-4) = 3x \times x + 3x \times (-4) - 1 \times x - 1 \times (-4) = 3x^2 - 13x + 4$
- $(x+2)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x + 2x^2 + 2x + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$