Proportionnalité

M. LE GRUIEC

17 mars 2025

1. Notion de grandeurs proportionnelles

Définition

Deux grandeurs sont proportionnelles si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre appelé ***coefficient de proportionnalité***

Exemple

Pour faire 12 crêpes, il faut 4 œufs.

- Grandeur n° 1 $\longrightarrow$ nombre de crêpes.
- Grandeur n° 2 $\longrightarrow$ nombre d'œufs.

crêpes	12	24	36	6	30
œufs	4	?	?	?	?

Consigne : compléter le tableau.

crêpes	12	24	36	6	30
œufs	4	8	12	2	10

- Si pour 12 crêpes il faut 4 oeufs, alors pour 24 crêpes, autrement dit le double de crêpe, il faut également le double d'oeufs, soit 24.
- Sur le même raisonnement, si on triple le nombre de crêpes, il faut tripler le nombre d'oeufs. Donc pour 36 crêpes il faut 12 oeufs.
- Si on divise le nombre de crêpes par deux, il faut diviser le nombre d'oeufs par deux. Donc pour 6 crêpes il faut 2 oeufs.
- Enfin, 30=24+6, donc pour 30 crêpes il faut 8+2=10 oeufs.

Exemple (suite)

crêpes	12	24	36	6	30
oeufs	4	8	12	2	10

× ?

× ?

- Si pour 4 oeufs je peux réaliser 12 crêpes alors le coefficient de proportionnalité pour passer des oeufs aux crêpes est 3 car $3 \times 4 = 12$. On remarque que

$$\frac{12}{4} = \frac{24}{8} = \frac{36}{12} = \frac{6}{2} = \frac{30}{10} = 3 = \text{coef. bas vers haut}$$

- Si pour 12 crêpes il faut 4 oeufs alors le coefficient des proportionnalités pour passer des crêpes aux oeufs est $1/3$ car $1/3 \times 12 = 4$ ($\div 3 \Leftrightarrow \times 1/3$). On remarque

$$\frac{4}{12} = \frac{8}{24} = \frac{12}{36} = \frac{2}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{3} = \text{coef. haut vers bas}$$

Conclusion : dans une recette de cuisine, les grandeurs sont proportionnelles.

Proposition

Dans une relation de proportionnalité, pour aller de la grandeur n° 1 à la grandeur n° 2, on multiplie par

$$\frac{\text{grandeur n° 2}}{\text{grandeur n° 1}}$$

Exemple

$\times 3$

crêpes	12	24	36	6	30
oeufs	4	8	12	2	10

$\times 1/3$

2. Reconnaitre une situation de proportionnalité par le calcul

Méthode

Pour déterminer si deux grandeurs représentées dans un tableau sont proportionnelles, on peut calculer les quotients des valeurs correspondantes de ces grandeurs et les comparer.

- Si les quotients sont égaux, on conclut qu'il s'agit d'un tableau de proportionnalité.
- Sinon il ne s'agit **pas** d'un tableau de proportionnalité.

Exemples

Grandeur n° 1	13	15	20
Grandeur n° 2	67,6	78	104

$$\frac{67{,}6}{13} = 5{,}2 \quad \frac{78}{15} = 5{,}2 \quad \frac{104}{20} = 5{,}2$$

Tous les quotients sont égaux, donc ce tableau est un tableau de proportionnalité.
Le coefficient de proportionnalité est 5,2

Grandeur n° 1	5	12
Grandeur n° 2	8	21

$$\frac{8}{5} = 1{,}6 \quad \frac{21}{12} = 1{,}75$$

Les quotients ne sont pas égaux, donc ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

Exercice

Dans un magasin, tous les pulls sont au même prix : 20 €. Le magasin pratique l'offre suivante pendant les soldes d'hiver : 2 pulls achetés, le troisième offert.

1. Quelles sont les deux grandeurs en jeu ?
2. Ces grandeurs sont-elles proportionnelles ?

Exercice (correction)

Pulls	1	2	3
Prix (€)	20	40	40

× *IMPOSSIBLE*

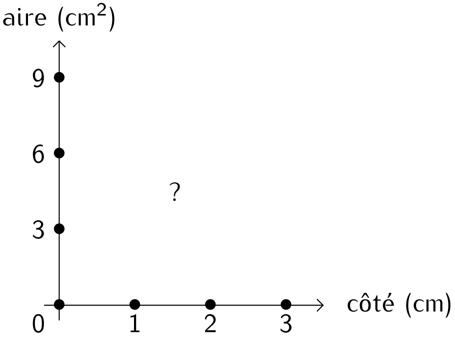
$$\frac{20}{1} \neq \frac{40}{3}$$

Ce n'est **PAS** une situation de proportionnalité.

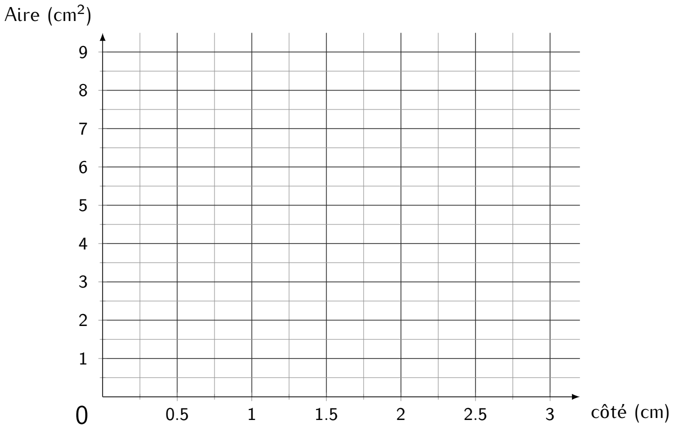
3. Représenter une grandeur en fonction d'une autre

Exemple

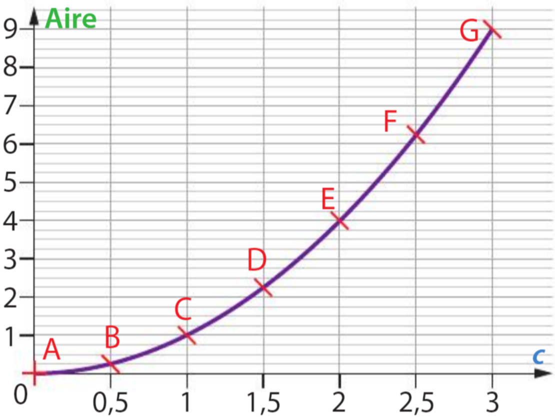
On veut représenter graphiquement l'aire d'un carré ***en fonction de*** la longueur de son côté.



côté (cm)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
aire (cm^2)							



c	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Aire	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
Point	A	B	C	D	E	F	G

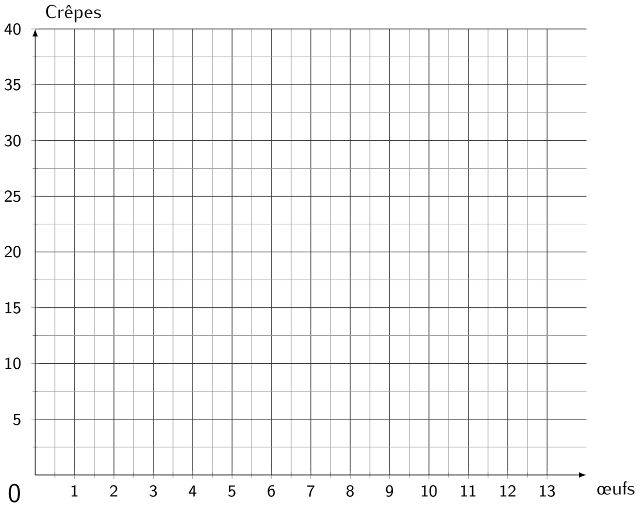


4. Reconnaître graphiquement une situation de proportionnalité

Activité

Représenter graphiquement le nombre de crêpes réalisables *en fonction du* nombre d'œufs disponibles (exemple 1 du cours).

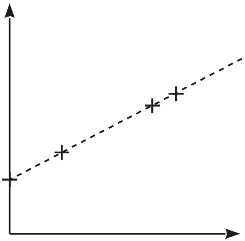
crêpes	12	24	36	6	30
œufs	4	8	12	2	10



Théorème ♡

Deux grandeurs sont proportionnelles si et seulement si elles sont représentées par des points alignés avec l'origine d'un repère.

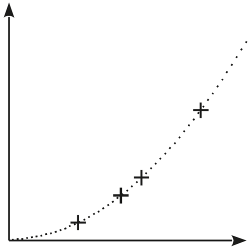
Exemple n° 1



Question : Somme-nous face à une situation de proportionnalité ?

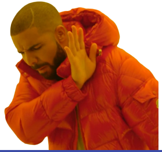
☞ Ne passe **PAS** par l'origine du repère, donc **NON**.

Exemple nº 2

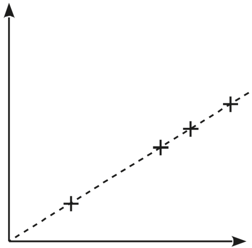


Question : Somme-nous face à une situation de proportionnalité ?

PAS alignés, donc NON.



Exemple nº 3



Question : Somme-nous face à une situation de proportionnalité ?

☞ **Alignés** avec **l'origine du repère**, donc **OUI.**

Le coin des erreurs

- Il faut que les deux conditions soient réunies.
- S'il n'y en a qu' une alors on conclut que non.

5. Trouver la quatrième proportionnelle

5.1. Le retour à l'unité

Exemple

À la boulangerie, cinq baguettes coûtent 4,5€. Combien coûtent trois baguettes ?

▶ Correction

$$5 \text{ baguettes} \longleftrightarrow 4{,}5€$$

Donc une baguette coûte :

$$\frac{4{,}5}{5} = 0{,}9 \text{ €}$$

et trois baguettes coûtent :

$$3 \times 0{,}9 = 2{,}7 \text{ €}$$

5.2. Le coefficient de proportionnalité

Exemple

On réalise une maquette.

4 cm sur la maquette $\longleftrightarrow$ 45 m en réalité

Question : À combien une mesure de 7 cm sur la maquette correspondrait-elle en réalité ?

▶ Correction

Longueur sur la maquette (cm)	4	7
Longueur réelle (m)	45	x

$\times$ 45/4

$$x = 7 \times \frac{45}{4} = 78{,}75\,\text{m}$$

Exemple

On reprend l'exemple précédent.

Longueur sur la maquette (cm)	4	7
Longueur réelle (m)	45	x

- Il s'agit d'un tableau de proportionnalité, donc **par définition** :

$$\frac{4}{45} = \frac{7}{x}$$

- L'égalité des **produits en croix** (*cours fractions*) s'écrit :

$$4 \times x = 45 \times 7$$

- On peut donc conclure que

$$\boxed{x = \frac{45 \times 7}{4} = 78{,}75\,\text{m}}$$

Théorème ♡- Produit en croix

On considère un tableau de proportionnalité :

a	c
b	x

La règle de trois donne la quatrième proportionnelle à l'aide de la formule :

$$x = \frac{b \times c}{a}$$

Exemple

98 kg de blé donnent environ 70 kg de farine. Quelle masse de blé serait nécessaire pour obtenir 120 kg de farine ?

Masse de blé (kg)	98	x
Masse de farine (kg)	70	120

$$x = \frac{98 \times 120}{70} = 168$$

Il faut donc 168 kg de blé pour obtenir 120 kg de farine.

6. Proportion et pourcentage

Exemple

Trois cinquièmes des élèves d'une classe de 25 élèves sont des filles.

Question : Combien y a-t-il de filles dans cette classe ?

▶ Correction

filles dans la classe	3	x
nombres d'élèves dans la classe	5	25

$$x = \frac{3}{5} \times 25 = 15$$

Proposition

Pour prendre une proportion d'une quantité, je multiplie la quantité par la proportion.

Exemples

- Pour prendre 4/7 de 49, je fais :

$$\frac{4}{7} \times 49 = 28$$

- Pour prendre 7/9 de 162, je fais

$$\frac{7}{9} \times 162 = 126$$

6.2. Cas particulier : prendre un pourcentage

Définition

Un **pourcentage** traduit une situation de proportionnalité où la **quantité totale est ramenée à 100**.

- C'est un fraction de dénominateur 100.

Exemples

- $\dfrac{15}{100} = 15\%$ (notation)
- $\dfrac{5}{20} = \dfrac{5 \times 5}{20 \times 5} = \dfrac{25}{100} = 25\%$ (notation)

Exemple

Un gâteau de 160 g contient 32% de chocolat.
Question : Quelle est la quantité de chocolat dans ce gâteau ?

- **Méthode 1 : tableau**

chocolat (g)	32	x
gâteau (g)	100	160

$$x = \frac{32 \times 160}{100} = 51{,}2 \text{ g}$$

- **Méthode 2 ♥ : proposition**

Prendre p% c'est multiplier p/100.

$$\frac{32}{100} \times 160 = 51{,}2 \text{ g}$$

6.3. Exprimer un pourcentage

Exemple

Une autre recette de gâteau utilise 64 g de chocolat pour un gâteau de 160 g.
Question : Quel pourcentage de la masse le chocolat représente-t-il ?

▶ **Correction** : on veut ramener la quantité totale à 100.

chocolat (g)	64	x
gâteau (g)	160	100

$$x = \frac{64 \times 100}{160} = 40$$

Donc 40% (40 pour cent, c'est-à-dire 40 g de chocolat pour 100 g de gâteau)

Exemple.

Un menu coûte 20€. Un restaurateur augmente le prix de son menu de 30%.

Question : Quel est le nouveau prix du menu ?

▶ Correction

L'augmentation représente

$$\frac{30}{100} \times 20 = 6 \text{ €}$$

$$\text{Nouveau prix} = \underbrace{20\text{€}}_{\text{prix initial}} + \underbrace{6\text{€}}_{\text{augmentation}} = 26 \text{ €}$$

Le coin des erreurs

- Ne pas oublier d'**ajouter** l'augmentation au prix initial après l'avoir calculée.

Exemple

Un pull coûte 40€. Pour les soldes, le magasin applique une réduction de 20% sur ce pull.

Question : Quel est le nouveau prix ?

▶ Correction

La réduction représente :

$$\frac{20}{100} \times 40 = 8 \text{ €}$$

$$\text{Nouveau prix} = \underbrace{40 \text{ €}}_{\text{prix initial}} - \underbrace{8 \text{ €}}_{\text{réduction}} = 32 \text{ €}$$

Le coin des erreurs

- Ne pas oublier d'**enlever** la réduction au prix initial après l'avoir calculée.