Le théorème de Pythagore

M. LE GRUIEC

17 novembre 2024

1. Notion de racine carrée

1.1. Définition de la racine carrée d'un nombre

Définition

Mettre un nombre au carré c'est multiplier ce nombre par lui-même. On note a^2 le carré d'un nombre a.

Exemples

$2^2 = 2 \times 2 = 4\,; \quad 3^2 = 3 \times 3 = 9\,; \quad 1^2 = 1 \times 1 = 1$

Définition

Trouver la racine carrée d'un nombre $\mathbf{a}$ c'est trouver un nombre *positif* qui, mis au carré, donne $\mathbf{a}$. On note $\sqrt{\mathbf{a}}$ la racine carrée du nombre $\mathbf{a}$.

Exemples

- La racine carrée de 4 est 2 car $2^2 = 2 \times 2 = 4$. On note $\sqrt{4} = 2$.
- La racine carrée de 9 est 2 car $3^2 = 3 \times 2 = 9$. On note $\sqrt{9} = 3$.
- La racine carrée de 64 est 8 car $8^2 = 8 \times 8 = 64$. On note $\sqrt{64} = 8$.

Activité

1. Existe-t-il un entier qui soit racine carrée de 25 ?
2. Existe-t-il un entier qui soit racine carrée de 20 ?
3. Trouve un encadrement de $\sqrt{20}$ entre deux entiers successifs.
4. À l'aide de ta calculatrice, donne une approximation au centième de $\sqrt{20}$.

À retenir

- Un nombre est un carré parfait si sa racine carrée est un entier. Les premiers carrés parfaits sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, ...
- Le plus souvent, un nombre n'est **pas** un carré parfait, il existe tout de même une racine carrée et la **calculatrice** peut en donner une approximation.

Utilisation de la calculatrice

Voici la séquence de touche à exécuter sur votre calculatrice en fonction des différents modèles pour trouver par exemple la racine carrée de 34.

TI	2nde, √ x^2, 3, 4, entrer =, ◂ ▸
Casio	SECONDE, x^2, 3, 4, SECONDE, EXE
Numworks	√, 3, 4, EXE

On trouve alors $\sqrt{34} \simeq 5{,}83$ arrondi au centième.

2. Le théorème de Pythagore

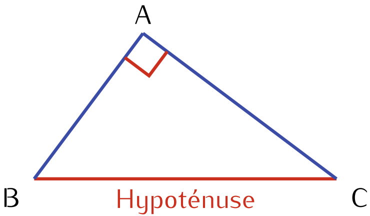
2.1. Rappels

Rappel

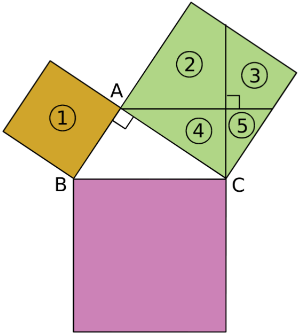
Un triangle est dit **rectangle** s'il possède un **angle droit**, c'est-à-dire un angle de mesure 90°.

Définition

Dans un **triangle rectangle**, le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse**.
Il s'agit toujours du **plus grand côté**.



2.2. Sur la piste du théorème de Pythagore



a. Avec ces cinq pièces, reconstitue le grand carré rose. Quelle relation y a-t-il entre l'aire du carré jaune, l'aire du carré vert et l'aire du carré rose ?

b. Exprime, à l'aide des lettres de la figure, les aires des carrés jaune, vert et rose.

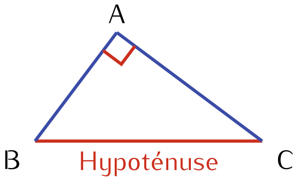
c. En te servant de la relation trouvée à la question **b.**, quelle égalité peux-tu alors écrire ?

2.3. Énoncé du théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore ♡

Si un triangle est rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

En d'autres termes, **si** un triangle ABC est **rectangle** en A

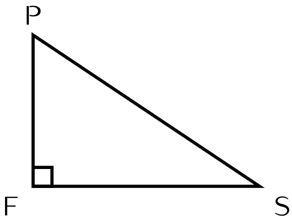


alors on peut écrire l'égalité suivante :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Exemple

On considère le triangle rectangle ci-dessous.



Puisque le triangle PSF est rectangle en F,
par le théorème de Pythagore on peut écrire :

$$PS^2 = PF^2 + FS^2$$

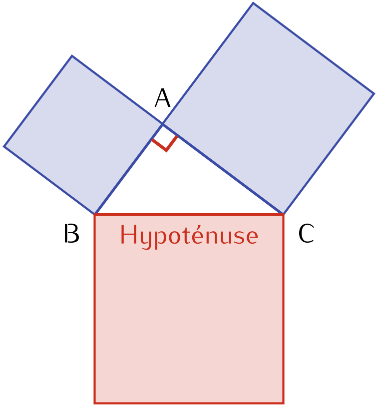
carré de l'hypoténuse

somme des carrés des deux autres côtés

Le coin des erreurs :

- Je vérifie que mon triangle est rectangle.
- Je repère bien l'hypoténuse (en face de l'angle droit).
- Je n'oublie surtout pas de **mettre toutes les longueurs au carré**.

2.4. Interprétation du théorème en termes d'aires

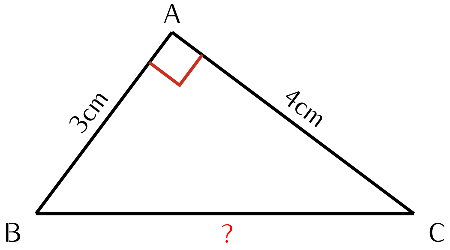


- Le théorème affirme que dans un triangle rectangle, l'aire du carré rouge est égale à la somme des aires des deux carrés bleus. On a pu le constater lors de l'activité.

3. Calculer une longueur à l'aide de Pythagore

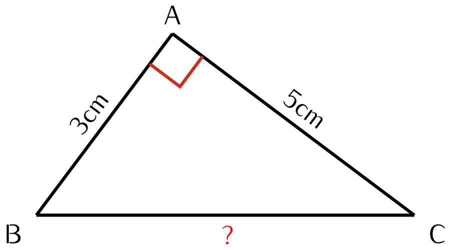
Le théorème de Pythagore sert à **calculer une longueur dans un triangle rectangle**.
Il existe deux configurations types qui sont détaillées dans la suite.

- la première configuration consiste à trouver la longueur de l'hypoténuse en connaissant celles des deux autres côtes.



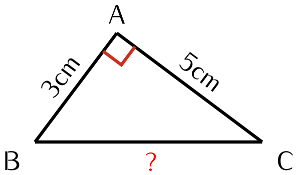
3.1. Déterminer la longueur de l'hypoténuse

Exemple type n° 1 ♥



Question : Déterminer la longueur BC.

Correction ✍



- Je sais que mon triangle est **rectangle**, donc je peux appliquer le **théorème de Pythagore**.
- Ce dernier nous dit que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- Cela donne, en utilisant les données de l'exercice,

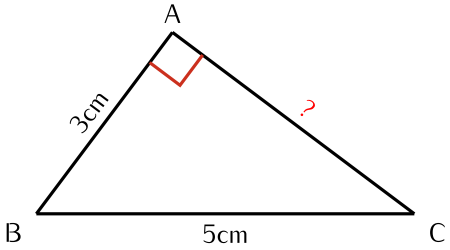
$$BC^2 = 3^2 + 5^2 = 3 \times 3 + 5 \times 5 = 9 + 25 = 34$$

- Pour trouver BC, on cherche alors la **racine carrée** de 34. On obtient à la *calculatrice*

$$\boxed{BC = \sqrt{34} \simeq 5{,}83 \text{ cm}}$$

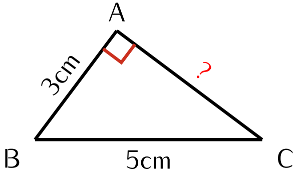
3.2. Déterminer la longueur d'un petit côté

Exemple type n° 2 ♥



Question : Déterminer la longueur de AC.

Correction ✍



- Je sais que mon triangle est **rectangle**, donc je peux appliquer le **théorème de Pythagore**.
- Ce dernier nous dit que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- Cela donne, en utilisant les données de l'exercice,

$$5^2 = 3^2 + AC^2 \quad \textbf{et donc} \quad AC^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

- Pour trouver AC, on cherche alors la **racine carrée** de 16. On obtient

$$\boxed{AC = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}}$$

Astuces

- Lorsqu'on cherche un petit côté, il y a toujours un « – » qui apparait :

$$5^2 = 3^2 + AC^2 \quad \textbf{et donc} \quad AC^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

- Dans cette configuration, on peut retenir que le carré du petit côté cherché est égal à

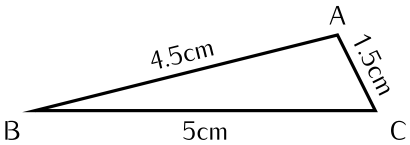
$$\textbf{hypoténuse}^2 - \textbf{petit côté connu}^2$$

- Attention à **ne pas oublier de prendre la racine carrée à la fin** pour obtenir le résultat final.

4. La *réciproque* du théorème de Pythagore

Activité

On considère le triangle suivant



a. Si le triangle était rectangle, quel côté serait l'hypoténuse ?
b. Calcule AB^2, AC^2 et BC^2.
c. Compare BC^2 et $AB^2 + AC^2$
d. Le triangle est-il rectangle ?

Synthèse

- **Un triangle que ne vérifie pas l'égalité de Pythagore ne peut pas être rectangle** car s'il l'était, l'égalité serait vérifiée.
- La question de la section est la suivante : **Que dire d'un triangle qui vérifie l'égalité de Pythagore ?**

4.1. Qu'est-ce qu'une réciproque

Définition

Pour former la réciproque d'une proposition, il faut inverser la conclusion et l'hypothèse. Une réciproque peut être vraie comme elle peut être fausse.

Exemple 1

« S'il pleut alors il y a des nuages »

La réciproque est :

« S'il y a des nuages alors il pleut » *?*

- Bien que la phrase initiale soit vraie, la réciproque est clairement fausse. Il peut très bien y avoir des nuages sans qu'il pleuve.

Exemple 2

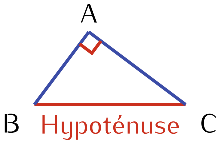
« S'il pleut alors de l'eau tombe du ciel »

La réciproque est

« Si de l'eau tombe du ciel alors il pleut » ?

- Cette fois-ci, la réciproque est vraie.

Activité



Le théorème du Pythagore dit que

« **Si** un triangle ABC est rectangle en A **alors** $BC^2 = AB^2 + AC^2$ »

Question : Former la réciproque du théorème de Pythagore.

Synthèse

- La réciproque du théorème de Pythagore s'énonce de la manière suivante :

  « **Si** $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **alors** le triangle ABC est rectangle en A »

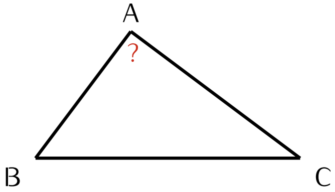
- On *admet* que **cette réciproque est vraie**, autrement dit, l'égalité e Pythagore n'est vérifiée que dans les triangles rectangles.

4.2. Énoncé de la *réciproque* de Pythagore

La *réciproque* du théorème de Pythagore ♡

On considère un triangle ABC.

Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ *alors* le triangle est rectangle en A.

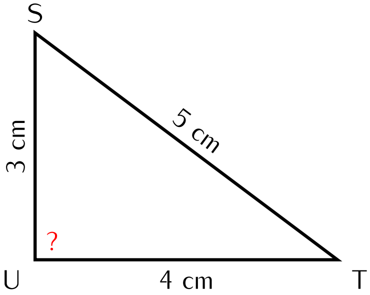


Le coin des erreurs

- Contrairement au théorème (direct), **on ne sait pas si le triangle est rectangle**.
- La réciproque sert uniquement à **montrer qu'un triangle est rectangle**.

4.3. Montrer qu'un triangle est rectangle

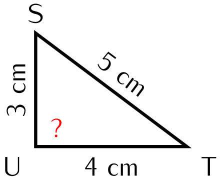
Exemple type n° 3 ♥



Question : Le triangle STU est-il rectangle ?

- **Il est important de saisir qu'on ne cherche pas les longueurs du côtés, on les connaît toutes par ailleurs. On cherche la nature du triangle.**

Correction ✍



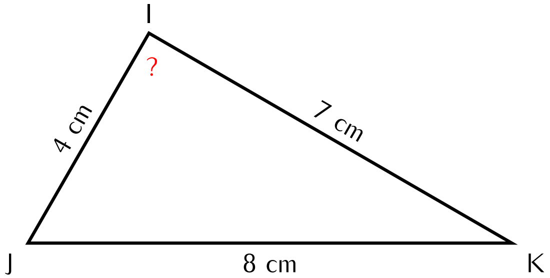
- **Je commence par chercher le plus grand côté**, car dans le cas où on montre que le triangle est rectangle, ce sera forcément lui l'hypoténuse. Il s'agit ici de [ST].
- J'effectue ensuite **deux calculs séparés** :

$$\textbf{d'une part} \quad ST^2 = 5^2 = 25 \quad \textbf{d'autre part} \quad US^2 + UT^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

- Je compare ensuite les deux résultats. Je constate qu'ici $ST^2 = US^2 + UT^2$
- Je peux donc conclure, **par la réciproque du théorème de Pythagore**, que le triangle n'est pas rectangle.

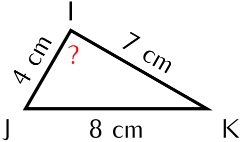
4.4. Montrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Exemple type n° 4 ♥



Question : Le triangle IJK est-il rectangle ?

Correction ✍



- **Je commence par chercher le plus grand côté**, car dans le cas où on montre que le triangle est rectangle, ce sera forcément lui l'hypoténuse. Il s'agit ici de [JK].
- J'effectue ensuite **deux calculs séparés** :

$$\textbf{d'une part} \quad JK^2 = 8^2 = 64 \quad \textbf{d'autre part} \quad IJ^2 + IK^2 = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65$$

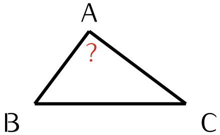
- Je compare ensuite les deux résultats. Je constate qu'ici $ST^2 \neq US^2 + UT^2$
- Je peux donc conclure, **par le théorème de Pythagore**, que le triangle n'est pas rectangle. En effet, s'il l'était, l'égalité aurait lieu.

Le coin des erreurs

- Il faut toujours séparer les deux calculs car on ne sait pas si l'égalité aura lieu (comme on vient de le constater).
- Ici, on a utilisé le théorème de Pythagore et non sa réciproque.

Point méthode à retenir

À l'aide du théorème et de sa réciproque, je peux **montrer qu'un triangle est rectangle *ou non* lorsqu'on connait les longueurs des trois côtés**. On procède de la manière suivante :



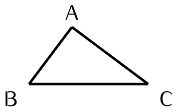
- Je dispose d'un triangle comme ci-dessus et **je veux savoir s'il est rectangle ou non**.
- J'effectue **deux calculs séparés**. Je commence par trouver le plus grand côté (*c'est forcément lui l'hypoténuse si le triangle est rectangle*). Ici il s'agit de BC. Je calcule ensuite

  d'une part BC^2 **et d'autre part** $AB^2 + AC^2$

- Deux cas de figure peuvent se produire :

  1. Si je constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ **alors** mon triangle est rectangle en A par la **réciproque** du théorème de Pythagore.
  2. Si je constate que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ **alors** mon triangle n'est pas rectangle par le **théorème de Pythagore** (car s'il l'était on aurait égalité).

5. Conclusion



Carte mentale sur le théorème de Pythagore

Je sais que mon triangle est rectangle en A

Je connais deux longueurs et je cherche la dernière

J'écris

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

je trouve le carré de la longueur cherchée et je prend la racine

Exemples types n° 1 et 2

♥

Je cherche à savoir si mon triangle est rectangle

Je connais forcément les trois longueurs du triangle

Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ mon triangle est rectangle en A

Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ mon triangle n'est pas rectangle

Exemples types n° 3 et 4