Nombres relatifs et opérations

M. LE GRUIEC

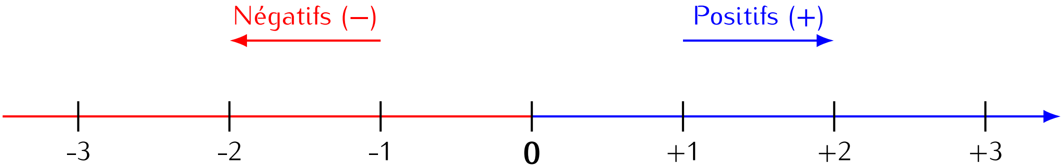
8 septembre 2024

1. Rappels sur les nombres relatifs

1. Rappels sur les nombres relatifs

Définition

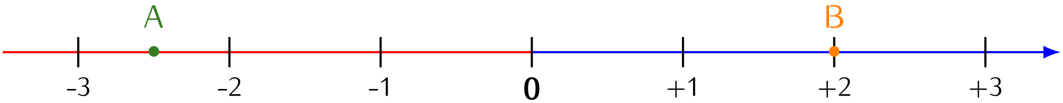
Un **nombre relatif** est un nombre auquel on a adjoint un signe positif $(+)$ ou négatif $(-)$ indiquant sa position par rapport à 0 sur un axe orienté.



Axe des nombres relatifs

Remarque

- Pour les nombres positifs, on omet souvent le signe $+$.



Définition

Sur un axe gradué, chaque point est repéré par un unique nombre relatif. On l'appelle l'**abscisse** du point. Inversement, à chaque nombre relatif on peut associer un unique point sur l'axe.

Exemples

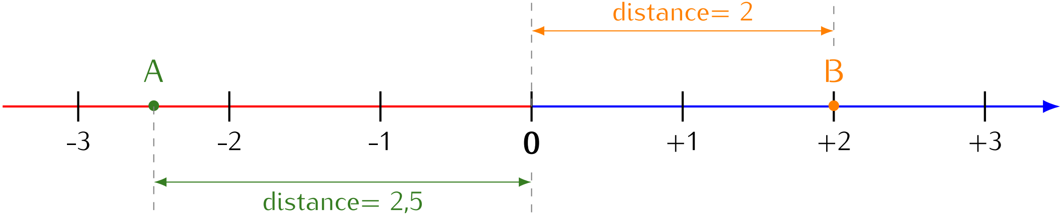
- Le point A a pour abscisse -2,5
- Le nombre +2 est associé au point B

Définition

La **distance à zéro** d'un nombre est la distance qui sépare ce nombre de 0 sur l'axe.

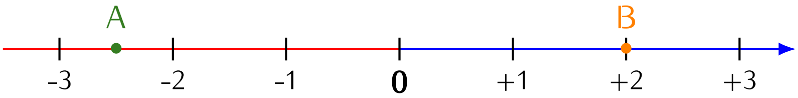
- Une distance à zéro est toujours positive
- Il s'agit du nombre sans son signe

Exemples : La distance à zéro de 2 est 2 et celle de -2,5 est 2,5.



Définition

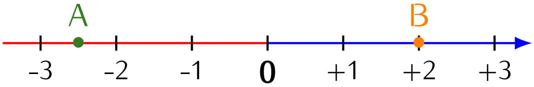
Lorsqu'on parcourt une droite graduée dans le sens de la flèche, le plus petit de deux nombres relatifs est celui qu'on rencontre en premier.



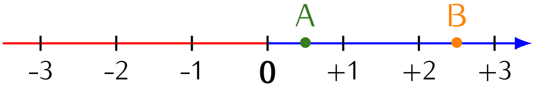
- L'axe est parcouru dans le sens de la flèche, donc de gauche à droite. Plus un nombre est à gauche, plus il est petit et inversement, plus il est à droite, plus il est grand.
- **C'est exactement comme avec les températures**. Lorsqu'il fait -3°C, il fait plus froid que Lorsqu'il fait -1°C, donc -3°C est plus froid, donc plus petit, que -1°C.

Exemples : on peut distinguer trois cas

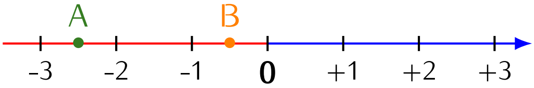
- Un nombre positif est toujours supérieur à un nombre négatif. Ici -2,5 < 2 .



- La comparaison des nombres positifs est naturelle. Le plus petit est celui qui est le plus proche de 0. Ici 0,5 < 2,5 .



- **Attention.** Si les deux nombres sont négatifs, le plus grand est celui avec la plus petite distance à zéro (le plus à droite donc). C'est l'inverse du cas précédent. Ici -2,5 < -0,5 .



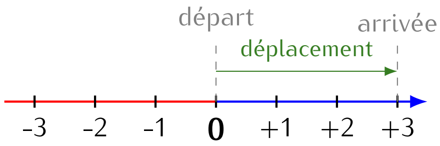
2. Additionner des nombres relatifs

Activité : partie 1 – déplacements simples

Wall-E est un petit robot qui ne peut se déplacer que sur une droite graduée et ne comprend qu'un ordre : « avance de x ».

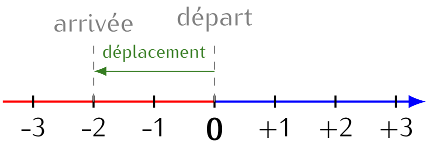
▶ Si x est positif, Wall-E avance dans le sens de la flèche de la droite graduée.

Exemples : initialement, le robot est en 0, l'origine. « Wall-E, avance de 3 » . Le robot se retrouve à l'abscisse 3 .



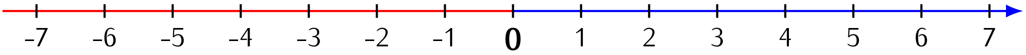
▶ Si x est négatif, il avance dans le sens contraire de la flèche de la droite graduée.

Exemples : initialement, le robot est en 0, l'origine. « Wall-E, avance de −2 » . Le robot se retrouve à l'abscisse −2 .



Dans chacun des cas suivants, le robot est **initialement en 0** . Placer sur une droite graduée le point où se retrouve le robot Wall-E et donner l'abscisse de ce point :

a. « Wall-E, avance de 5 »
b. « Wall-E, avance de -4 »
c. « Wall-E, avance de 7 »
d. « Wall-E, avance de 0 »



Activité : partie 2 - déplacements successifs

1. On donne les ordres suivants au robot Wall-E, qui se trouve initialement en 0 dans chaque cas.

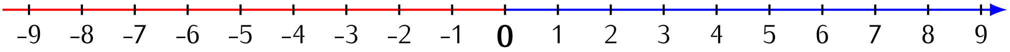
   1.1 « Wall-E, avance de 5 puis avance de 4 » .
   En quelle abscisse se retrouve Wall-E ? Quel calcul permet d'obtenir ce résultat ?

   1.2 « Wall-E, avance de -6 puis avance de 3 » .
   En quelle abscisse se retrouve Wall-E ? En s'inspirant de la question précédente, quelle égalité peut-on écrire ?

2. De la même manière, écrire les égalités correspondant aux deux ordres suivants.

   2.1 « Wall-E, avance de -7 puis avance de -2 »

   2.2 « Wall-E, avance de 2 puis avance de -6 »



Activité : partie 3 - observations et synthèse

1. 1.1 À l'aide d'une droite graduée et du robot Wall-E, déterminer les sommes suivantes :

   $$6+7 \quad ; \quad -3+(-9) \quad ; \quad 7+4 \quad ; \quad -2+(-5)$$

   1.2 Que peut-on remarquer sur la somme de deux nombres relatifs de même signe ?

2. 2.1 À l'aide d'une droite graduée et du robot Wall-E, déterminer les sommes suivantes :

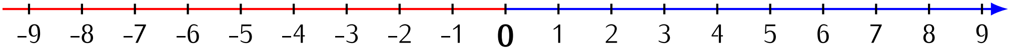
   $$2+(-4) \quad ; \quad -7+5 \quad ; \quad 9+(-3) \quad ; \quad 1+(-10)$$

   2.2 Que peut-on remarquer sur la somme de deux nombres relatifs de signes différents ?

3. 3.1 À l'aide d'une droite graduée et du robot Wall-E, déterminer les sommes suivantes :

   $$6+(-6) \quad ; \quad -2+2 \quad ; \quad 3{,}5+(-3{,}5)$$

   3.2 Placer ces six nombres sur une droite graduée. Que peut-on remarquer ?



Proposition

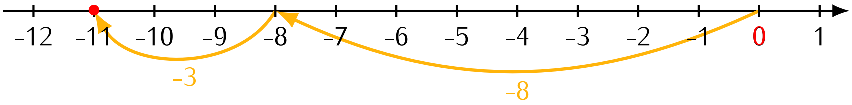
Pour **additionner** deux nombres relatifs, on procède ainsi :

- si les deux nombres sont de même signe, alors on conserve le signe commun et on additionne les distances à zéro.
- si les deux nombres sont de signes opposés, alors on prend le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro et on soustrait les distances à zéro.

Exemples et illustations

- On veut additionner (-3) et (-8). Le signe commun est « $-$ », donc la somme sera un nombre **négatif**. De plus, $3 + 8 = 11$, donc la distance à zéro sera égale à 11. On place devant la distance à zéro obtenue le signe déterminé précédemment. Ainsi,

$$(-8) + (-3) = (-11)$$

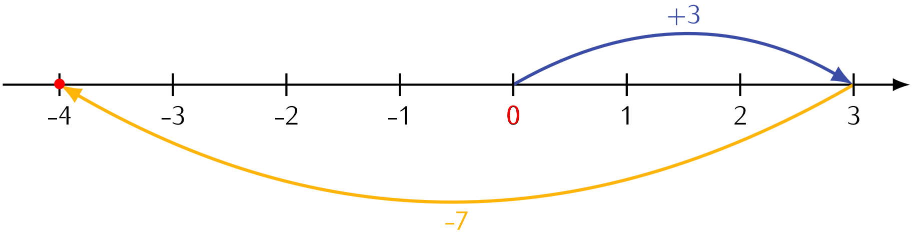


Exemples et illustations (suite)

- On veut additionner 3 et -7 . Les deux nombres sont de signes opposés. Les deux distances à zéro sont 3 et 7 . Le nombre qui est à la plus grande distance à zéro est -7, dont le signe est « $-$ » . La somme obtenue sera donc un nombre négatif. De plus, $7-3=4$, donc la distance à zéro sera égale à 4. On place devant la distance à zéro obtenue le signe déterminé précédemment. Ainsi,

$$3+(-7)=-4$$

.



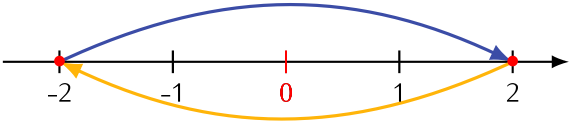
Définition

On dit que deux nombres sont **opposés** si leur somme est égale à 0 .

- Tout nombre possède un opposé.
  C'est le nombre de signe contraire et de même distance à zéro.
- Deux nombres opposés sont symétriques par rapport à 0 sur l'axe des nombres

Exemples

- Les nombres 2 et -2 sont opposés l'un de l'autre car 2+(-2)=0.
  On dit que -2 et l'opposé de 2 et 2 est l'opposé de -2.



- L'opposé de 7,8 est -7,8 et l'opposé de -6,3 est +6,3.

3. Soustraire des nombres relatifs

Activité

1. Calculer la somme de toutes les cartes.

2. Si on enlève la carte 

que vaut alors la somme des cartes ?

3. On remet la carte précédente et on enlève la carte 

. Que vaut alors la somme des cartes ?

4. Même question pour les cartes suivantes.

a. 

b. 

c. 

5. Proposer une méthode générale pour soustraire un nombre relatif.

Proposition

Soustraire un nombre relatif, c'est additionner son opposé. Autrement dit, pour des nombres a et b :

$$a - b = a + (-b) \qquad \text{et} \qquad a - (-b) = a + b$$

Exemples

On veut calculer $A = -5 - 2$.
Pour soustraire 2, on ajoute son opposé : -2.

$$A = -5 - 2$$
$$A = -5 + (-2)$$
$$A = -(5 + 2)$$
$$A = -7$$

On veut calculer $B = 3 - (-6{,}2)$.
Pour soustraire $-6{,}2$, on ajoute son opposé : 6,2.

$$B = 3 - (-6{,}2)$$
$$B = 3 + 6{,}2$$
$$B = 9{,}2$$

Remarque (pour aller plus loin)

L'addition est commutative, c'est-à-dire que l'on peut additionner dans l'ordre que l'on veut : $a + b = b + a$. Par exemple, $2 + 1 = 1 + 2 = 3$. De même, $(-3) + 5 = 5 + (-3) = 2$.

Cependant, **la soustraction n'est pas commutative** : $a - b \neq b - a$.
Par exemple, $7 - 3 = 4$ tandis que $3 - 7 = -4$.

Il est par contre possible d'écrire : $a - b = a + (-b) = (-b) + a$

Par exemple, $7 - 3 = 4$, mais on a aussi $-3 + 7 = 4$.

Enlever les signes « $-$ », « $+$ », et les parenthèses inutiles d'une expression, c'est **simplifier son écriture**. Par exemple, on peut considérer $S = (+6) - (-4) + (-10) - (+7) + (-5)$.

On commence par transformer les soustractions en additions.

$$S = (+6) + (+4) + (-10) + (-7) + (-5)$$

Sauf calculs astucieux, on regroupe ensuite les termes par signe, on obtient

$$S = (6 + 4) - (10 + 7 + 5) = 10 - 22 = -(22 - 10) = -12$$

Méthode : effectuer une suite d'additions et de soustractions

Pour effectuer des additions et soustractions de nombres relatifs, on peut :

- transformer les soustractions en additions
- regrouper les nombres positifs entre eux et les nombres négatifs entre eux

Exemple

On veut calculer $A = -1 + 3 - (-7) + (-2) - 5 - 4$.

- On transforme les soustractions en additions

$$A = -1 + 3 - (-7) + (-2) - 5 - 4$$
$$A = -1 + 3 + 7 + (-2) + (-5) + (-4)$$

- On regroupe les termes positifs entre eux et les termes négatifs entre eux.

$$A = 3 + 7 + (-1) + (-2) + (-5) + (-4)$$
$$A = 10 + (-12)$$
$$A = -2$$

Astuce

La méthode précédente est générale, il convient de regarder avant si des calculs astucieux sont possibles. Par exemple,

$$S = (-8) + 1567 + 1 + (-1567) + 8$$

Il serait maladroit ici de regrouper les termes selon leur signe. En effet, on remarque des nombres opposés et qui s'annulent donc mutuellement. Il est alors commode de regrouper les termes de la façon suivante :

$$S = \underbrace{(-8) + 8}_{=0} + \underbrace{1567 + (-1567)}_{=0} + 1 = 1$$