Nombres relatifs et opérations

M. LE GRUIEC

3 décembre 2024

1. Multiplier des nombres relatifs

Activité : partie 1 – une conjecture

1. Voici une chaine de calculs qui permet de fabriquer des nombres.

Écran de contrôle	Chaine de calcul	Résultat
	$5+5+5+5$	
3×5	$5+5+5$	15
2×5	$5+5$	10
	5	

1.1 Complète le tableau ci-dessus.

1.2 Dans la colonne *résultat*, quelle opération permet de passer d'une ligne à l'autre ?

2. On utilise à présent cette chaine de calcul en remplaçant 5 par (-6)

Écran de contrôle	Chaine de calcul	Résultat
	$(-6)+(-6)+(-6)+(-6)$	
	$(-6)+(-6)+(-6)$	
$2 \times (-6)$	$(-6)+(-6)$	-12
$1 \times (-6)$	-6	-6

2.1 Complète le tableau ci-dessus.

2.2 Quelle opération permet de passer d'une ligne à l'autre ?

2.3 Que peut-on conjecturer pour le produit de deux nombres de signes contraires ?

3. On souhaite compléter le tableau ci-contre selon le même principe que les tableaux précédents.

   3.1 Quelle opération permet de passer d'une ligne à l'autre ?

   3.2 Complète le tableau.

   3.3 Que peut-on **conjecturer** pour le produit de deux nombres de signes négatifs ?

Écran de contrôle	**Résultat**
$4 \times (-2)$	
$3 \times (-2)$	
$2 \times (-2)$	-4
$1 \times (-2)$	-2
$0 \times (-2)$	
$-1 \times (-2)$	
$-2 \times (-2)$	
$-3 \times (-2)$	
$-4 \times (-2)$	

Partie 2 - justification

1. 1.1 Calculer $(-1) \times 5$ et $(-1) \times 2$.

   1.2 Compléter la phrase suivante « Quand je multiplie un nombre par -1, je trouve son ... »

   1.3 Quel est l'opposé de -2 ? et de -5 ?

   1.4 À l'aide des deux dernières questions, quel est le résultat de $(-1) \times (-2)$ et de $(-1) \times (-5)$?

   1.5 Sur le même principe, quel est le résultat de $(-1) \times (-1)$?

2. On souhaite calculer $(-3) \times (-4)$.

   2.1 Calculer $(-1) \times 3$ et $(-1) \times 4$.

   2.2 Justifier que $(-3) \times (-4) = (-1) \times (-1) \times 3 \times 4$.

   2.3 En déduire, à l'aide de la question 1.5, le résultat de $(-3) \times (-4)$.

3. **Pour aller plus loin :** justification de la question 1.2.

   3.1 Rappeler la définition de l'opposé d'un nombre.

   3.2 On considère aun nombre relatif quelconque. Pour montre que $(-1) \times a$ est l'opposé de a, que faut-il montrer ?

   3.3 Factorise l'expression $a + (-1) \times a$ par a.

   3.4 Conclus.

Théorème : la règle des signes ♡

Pour calculer le *produit de deux nombres relatifs*, on *multiplie les distances à zéro* et le signe du produit est déterminé selon la règle suivante :

- **Le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif.**
- **Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.**

Théorème : la règle des signes ♡

Pour calculer le *produit de deux nombres relatifs*, on *multiplie les distances à zéro* et le signe du produit est déterminé selon la règle suivante :

- **Le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif.**
- **Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.**

a	$\times$	b	signe de $a \times b$
$+$	$\times$	$+$	$+$
$-$	$\times$	$-$	$+$
$+$	$\times$	$-$	$-$
$-$	$\times$	$+$	$-$

Théorème : la règle des signes ♡

Pour calculer le *produit de deux nombres relatifs*, on *multiplie les distances à zéro* et le signe du produit est déterminé selon la règle suivante :

- **Le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif.**
- **Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.**

Exemples

- $3 \times 6 = 18$
- $-2 \times (-5) = 10$
- $3 \times (-4) = -12$
- $-2{,}5 \times 2 = -5$
- $12 \times (-5) \times (-2) = -60 \times (-2) = 120$
- $12 \times (-5) \times (-2) = 12 \times 10 = 120$

a	$\times$	b	signe de $a \times b$
$+$	$\times$	$+$	$+$
$-$	$\times$	$-$	$+$
$+$	$\times$	$-$	$-$
$-$	$\times$	$+$	$-$

Activité

Calule

- $P_3 = (-1) \times (-1) \times (-1)$
- $P_4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$
- $P_5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

Conjecture le signe d'un produit en fonction du nombre de facteurs négatifs.

Activité

Calule

- $P_3 = (-1) \times (-1) \times (-1)$
- $P_4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$
- $P_5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$

Conjecture le signe d'un produit en fonction du nombre de facteurs négatifs.

Proposition

La distance à zéro d'un produit de nombres relatifs est donnée par le produit des distances à zéro. Le signe du produit est

- $+$ s'il y a un nombre pair de facteurs négatifs.
- $-$ s'il y a un nombre impair de facteurs négatifs.

Exemples

- Quel est le résultat de la multiplication suivante ?

$$A = (-1) \times (-4) \times 2 \times (-0{,}5) \times (-7)$$

Il y a quatre signes « $-$ ». Puisqu'il y a un nombre pair de nombres négatifs, le résultat est donc positif :

$$\begin{aligned} A =& (-1) \times (-4) \times 2 \times (-0{,}5) \times (-7) \\ A =& 1 \times 4 \times 2 \times 0{,}5 \times 7 \\ A =& 28 \end{aligned}$$

- $B = -2 \times 3 \times (-1) \times 6$

Il y a deux facteurs négatifs et 2 est un nombre pair, donc le produit est positif ;

$$B = 36$$

- $C = 2 \times (-3) \times (-1) \times (-6)$

Il y a trois facteurs négatifs et 3 est un nombre impair, donc le produit est négatif :

$$C = -36$$

2. Diviser des nombres relatifs

Activité

Soient a et b deux nombres relatifs et $\frac{a}{b}$ leur quotient. Par définition, on a

$$\frac{a}{b} \times b = a$$

▶ Avec la règle des signes, trouve le signe du quotient en fonction du signe de a et de b :

a/b	$\times$	b	a
?	$\times$	$+$	$+$
?	$\times$	$-$	$+$
?	$\times$	$-$	$-$
?	$\times$	$+$	$-$

Théorème : règle des signe pour le quotient ♡

La règle pour le signe d'un quotient est la même que celle pour le signe d'un produit.

Théorème : règle des signe pour le quotient ♡

La règle pour le signe d'un quotient est la même que celle pour le signe d'un produit.

Exemples

- $\dfrac{24}{2} = +12$
- $\dfrac{-42}{7} = -6$
- $\dfrac{-18}{-3} = +6$
- $\dfrac{3}{-7} = -\dfrac{3}{7}$

a	$\div$	b	signe de $a \div b$
$+$	$\div$	$+$	$+$
$-$	$\div$	$-$	$+$
$+$	$\div$	$-$	$-$
$-$	$\div$	$+$	$-$

Exemples : multiplications et divisions

- $A = \dfrac{11 \times (-3)}{(-5) \times (-2)} = \dfrac{-33}{10} = -3{,}3$

- $B = \dfrac{(-3) \times 2 \times (-5)}{-10 \times 4} = -\dfrac{3 \times 10}{10 \times 4} = -\dfrac{3}{4} = -0{,}75$

- $C = -\dfrac{7 \times (-2) \times 8}{14 \times 5} = \dfrac{14 \times 8}{14 \times 5} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$

- $D = \dfrac{(-1) \times (-2) \times (-1)}{5 \times (-4)} = \dfrac{2}{5 \times 4} = \dfrac{2}{20} = 0{,}1$

3. Enchaîner les opérations

Méthode

Comme d'habitude, lors d'un enchaînement de plusieurs opérations, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses, puis les multiplications et les divisions puis les additions et les soustractions.

Méthode

Comme d'habitude, lors d'un enchaînement de plusieurs opérations, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses, puis les multiplications et les divisions puis les additions et les soustractions.

Exemples

- $A = 6 - 6 \times 4$
- $B = 7 \times 5 - 6 \times 2{,}3$
- $C = 7 \times (5 - 6) \times 2{,}3$

Solution

$$A = 6 - 6 \times 4$$
$$A = 6 - 24$$
$$A = -18$$

$$B = 7 \times 5 - 6 \times 2{,}3$$
$$B = 35 - 13{,}8$$
$$B = 21{,}2$$

$$C = 7 \times (5 - 6) \times 2{,}3$$
$$C = 7 \times (-1) \times 2{,}3$$
$$C = (-7) \times 2{,}3$$
$$C = -16{,}1$$