Le problème et les deux exercices qui suivent sont totalement indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat.

Problème

Dans ce qui suit, **toutes** les variables aléatoires considérées sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Une variable aléatoire X (à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc) est dite symétrique si $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(X = -m)$ pour tout entier m.

Préliminaires

1. Si X prend la valeur 1 avec probabilité p et -1 avec probabilité $1 - p$, donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que X soit symétrique.

2. Si X est symétrique telle que $|X|$ est d'espérance finie, prouver que $\mathbb{E}(X) = 0$.

3. Prouver que si X est symétrique alors 0 est une médiane de X, ce qui signifie que $\mathbb{P}(X > 0) \leq 1/2 \leq \mathbb{P}(X \geq 0)$.

4. Montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi alors $X - Y$ est symétrique.

5. Montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et symétriques alors $X + Y$ est symétrique.

6. En déduire que plus généralement, si pour un entier $n \geq 2$, $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et symétriques alors leur somme S_n est symétrique.

Première Partie

Soit $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires indépendantes et symétriques. Pour tout entier $k \in [1, n]$ on pose $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$ et on se donne $x \geq 0$. On note de plus Ω_k l'événement $\{\max_{1 \leq j < k} S_j \leq x\} \cap \{S_k > x\}$ si $k \geq 2$ et Ω_1 l'événement $\{X_1 > x\}$.

Pour tout entier $k \in [1, n]$,

7. démontrer que
$$\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k \subseteq \{S_n > x\} \cap \Omega_k,$$

8. puis que
$$\mathbb{P}(\{S_n - S_k \geq 0\} \cap \Omega_k) \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}(\Omega_k).$$

9. Prouver que

$$\bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k = \left\{ \max_{1\leq j\leq n} S_j > x \right\}.$$

10. En déduire l'inégalité dite de Paul Lévy

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j > x \right) \leq 2\mathbb{P}\left(S_n > x\right).$$

Deuxième Partie

On considère $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, symétriques et de même loi. On suppose que X_1^2 est d'espérance finie non nulle et on note $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}\left(X_1^2\right)}$. Comme dans la Première Partie, étant donné un nombre réel positif x, pour tout entier $k \in [1, n]$ on note $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$, Ω_k l'événement $\{\max_{1\leq j<k} S_j \leq x, S_k > x\}$ si $k \geq 2$ et Ω_1 l'événement $\{X_1 > x\}$. Soit $y > 0$.

Pour tout entier $k \in [1, n]$,

11. démontrer que

$$\{S_n - S_k > 0\} \cap \Omega_k \supseteq \{S_n > x + y\} \cap \Omega_k \cap \{X_k \leq y\},$$

12. puis que

$$\mathbb{P}\left(\{S_n - S_k > 0\} \cap \Omega_k\right) \leq \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\Omega_k\right).$$

13. En déduire que

$$\mathbb{P}\left(S_n > x + y\right) - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_j > y\right) \leq \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j > x \right).$$

14. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(X_1 > y\right) \leq y^{-2} \sum_{m\in\mathbb{N}, m>y} m^2 \mathbb{P}\left(X_1 = m\right).$$

15. En déduire que pour tout $\theta > 0$ on a

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_j > \theta\sqrt{n}\right) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

16. Justifier que pour tout nombre réel λ on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(S_n > \lambda\sigma\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} \exp\left(-x^2/2\right) dx.$$

17. En utilisant l'inégalité de Paul Lévy et les évaluations précédentes, en conclure que pour tout nombre réel positif λ, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j > \lambda\sigma\sqrt{n} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} \exp\left(-x^2/2\right) dx.$$

18. Lorsque λ est négatif, quel est le comportement de $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq n} S_j > \lambda\sqrt{n}\right)$ quand n tend vers l'infini?

Exercice 1

Pour tout entier non nul n, on note

$$I_n = \int_0^1 \left((1-x)\,e^x\right)^n dx.$$

19. Calculer I_1 et I_2.

On cherche à présent à déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini. Soit ϕ l'application définie sur $[0,1[$ par $\phi(0) = 1/2$ et, pour tout $x \in]0,1[$

$$\phi(x) = \frac{-x - \ln(1-x)}{x^2}.$$

20. Prouver que ϕ est une bijection croissante de $[0,1[$ sur $[1/2, +\infty[$.

21. Démontrer que

$$I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

22. Soit $\sigma \in]0,1[$. On pose

$$\delta = \phi^{-1}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right),$$

où ϕ^{-1} désigne la bijection croissante de $[1/2, +\infty[$ sur $[0,1[$, réciproque de ϕ. Démontrer que

$$I_n \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \int_0^{\delta\sqrt{n}/\sigma} \exp\left(-x^2/2\right) dx.$$

23. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2

Pour tout quadruplet $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on considère la matrice carrée d'ordre 4

$$M(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbb{H}$ l'ensemble des matrices $M(x,y,z,t)$ lorsque (x,y,z,t) parcourt $\mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ l'ensemble des marices carrées d'ordre 4 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On définit enfin

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

25. Prouver que $(\mathbb{1}, I, J, K)$ est une base de $\mathbb{H}$.

26. Démontrer que $\mathbb{H}$ est strictement inclus dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

27. Pour toutes matrices A et B éléments de $\mathbb{H}$ vérifier que la matrice transposée ${}^t(AB)$ du produit AB est égale au produit BA .

28. Calculer les produits deux à deux des matrices $\mathbb{1}, I, J, K$ (prendre garde au fait que le produit matriciel n'est en général pas commutatif).

29. En déduire que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication.

Pour tout élément $Q = x\mathbb{1}+yI + zJ + tK$ de $\mathbb{H}$, on note $\overline{Q}$ son élément dit conjugué $\overline{Q} = x\mathbb{1}-yI - zJ - tK$.

30. Démontrer que $Q\overline{Q} = N^2(Q)\,\mathbb{1}$, où $N(Q)$ est un nombre réel que l'on calculera en fonction des coordonnées de Q dans la base $(\mathbb{1}, I, J, K)$.

31. En déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ admet un inverse (pour la multiplication) appartenant à $\mathbb{H}$.

32. Prouver que si Q est un élément de $\mathbb{H}$ tel que $QQ' = Q'Q$ pour tout $Q' \in \mathbb{H}$, alors il existe un nombre réel x tel que $Q = x\mathbb{1}$.

33. En conclure que $\mathbb{H}$ est un corps non commutatif.