Les deux exercices qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Chaque exercice est lui-même divisé en deux parties pouvant être traitées indépendamment, à l'exception de la question numéro 14 du deuxième exercice. Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes, du moment qu'il l'aura clairement indiqué.
Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Il sera fait grand cas lors de la correction de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Exercice I

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On se propose d'étudier deux façons de résoudre l'équation

$$Ax = b$$

en $x \in \mathbb{R}^n$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée à n lignes et $b \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur (colonne).
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(A) Première méthode : résolution du système par pivot de Gauss

1. On suppose dans cette question $n = 3$,

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Résoudre l'équation $Ax = b$ par la méthode du pivot de Gauss.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$

$$A = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $Ax = b$.

(B) Deuxième méthode : résolution approchée par une méthode itérative

Étant donné $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, on définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k - \delta_k \, {}^t\!A \, (Ax_k - b) \ ,$$

où ${}^t\!A$ désigne la transposée de A.

3. On suppose qu'il existe au moins un vecteur $x^\star \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax^\star = b$, et l'on pose pour tout entier k, $y_k = x_k - x^\star$. Pour tout entier k, trouver une matrice M_k telle que $y_{k+1} = M_k y_k$.

On suppose dans les questions 4 à 10 que $n = 2$ et

$$A = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on dit que

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} u_k^{(1)} \\ u_k^{(2)} \end{pmatrix}_{k\in\mathbb{N}} \qquad \text{converge vers} \quad \ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

si $(u_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et $(u_k^{(2)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2.

4. La matrice A_3 est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
5. On pose $C_3 = {}^tA_3A_3$. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de C_3 peut s'écrire $\{\lambda, \mu\}$, avec $0 < \lambda < 1 < \mu < 3$.
6. Pour chacune des valeurs propres de C_3, trouver un vecteur propre associé qui s'écrivent sous la forme $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avec $u^2 + v^2 = 1$.
7. Déterminer un couple de matrices $(P, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que
$$C_3 = {}^tPDP \qquad \text{avec} \quad {}^tPP = I_2 \ , \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad .$$
8. On note
$$z_k = \begin{pmatrix} s_k \\ t_k \end{pmatrix} = Py_k \ ,$$
où P est la matrice introduite à la question 7, et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la question 3. Montrer que pour tout entier k, $z_{k+1} = (I_2 - \delta_k D)z_k$.
9. On suppose, dans cette question seulement, que la suite $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\delta > 0$.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des valeurs de δ telles que la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
Pour tout $\delta \in \mathcal{D}$, quelle est la limite de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$?
10. On suppose, dans cette question seulement, que $\delta_0 = 0$ et pour tout $k \geqslant 1$, $\delta_k = \frac{1}{3}k^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$.
   (a) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge lorsque k tend vers l'infini.
   (b) Discuter, en fonction de la valeur de α, la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1 - ck^{-\alpha}\right)$ où $c \in]0, 1[$ est une constante quelconque.
   (c) En déduire la limite de la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction de la valeur de α.
   (d) Si l'on calcule la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en vue de résoudre l'équation $Ax = b$, quelle suite $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ conseilleriez-vous parmi les suites de la forme $\delta_k = \delta > 0$ et $\delta_k = \frac{1}{3}k^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$?

On considère pour finir le cas $n = 2$, $A = A_2$ et $b = b_2$ comme à la question 2.

11. Si $\delta_k = \delta = 1/5$ pour tout entier k, montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ tel que $A\bar{x} = b$.
 Indication : adapter le raisonnement des questions 4 à 9 en remplaçant A_3 *par* A_2.
 Comment $\bar{x}$ dépend-il de x_0 ?

Exercice II

(A) Loi de la partie fractionnaire d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire admettant la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée continue par morceaux, comme densité. On suppose que f est telle que $|f'|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout entier n positif ou nul, on définit $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par la relation

$$f_n(x) = \frac{x^n \exp(-x)}{n!} \ ,$$

où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et où par convention $0! = 1$. On rappelle l'équivalent de Stirling : quand n tend vers l'infini,

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \ .$$

On rappelle que la fonction de répartition de X est la fonction qui à tout nombre réel t associe $\mathbb{P}(X \leqslant t)$.

1. Quelle est la fonction de répartition d'une variable uniforme sur $[0, 1[$?
2. Montrer que f_0 et f_1 sont des densités de probabilité, puis que pour tout entier n positif ou nul, f_n est une densité de probabilité.
3. S'il existe un réel a tel que f soit croissante sur $]-\infty, a]$ et décroissante sur $[a, +\infty[$, exprimer $\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|dx$ à l'aide de $f(a)$.
   Indication : on pourra préalablement démontrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
4. Soit g une fonction dérivable définie sur $[0, 1[$ telle que $g(0) = g(1) = 0$, et telle qu'il existe un nombre réel C tel que pour tout $x \in [0, 1[$, $|g'(x)| \leqslant C$. Montrer :

$$\forall t \in [0, 1[\ , \ |g(t)| \leqslant \frac{C}{2} \ .$$

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière (c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x) et $\mathrm{frac}(x) \in [0, 1[$ sa partie fractionnaire, de sorte que $x = \lfloor x \rfloor + \mathrm{frac}(x)$. Par exemple, $\lfloor 12{,}34 \rfloor = 12$ et $\mathrm{frac}(12{,}34) = 0{,}34$.

5. Montrer que pour tout $t \in [0, 1[$:

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{frac}(X) \leqslant t\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k + t) \ .$$

6. En déduire que pour tout $t \in [0, 1[$:

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{frac}(X) \leqslant t\right) - t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k(t) \ ,$$

où $g_k : [0,1[\to \mathbb{R}$ est la fonction définie par :

$$g_k(t) = \int_k^{k+t} f(x)dx - t\int_k^{k+1} f(x)dx \ .$$

7. Montrer que g_k est dérivable sur $[0,1[$, puis que :

$$\forall t \in [0,1[\,,\ |g_k'(t)| \leqslant \int_k^{k+1} |f'(x)|dx$$

8. En déduire que :

$$\sup_{t\in[0,1]} |\mathbb{P}\left(\mathrm{frac}(X) \leqslant t\right) - t| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|dx \ .$$

9. Pour tout entier n positif ou nul, soit Z_n une variable aléatoire de densité f_n. Montrer que :

$$\sup_{t\in[0,1]} |\mathbb{P}\left(\mathrm{frac}(Z_n) \leqslant t\right) - t| \to 0$$

quand n tend vers l'infini.

(B) Loi de Benford

Dans cette section, on note $\log_{10}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par la relation $\log_{10}(x) = \ln(x)/\ln(10)$. On a donc pour tous réels a et b strictement positifs les relations $\log_{10}(ab) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b)$ et $\log_{10}(10^a) = a$. On appelle *loi de Benford* la loi de probabilité sur l'ensemble $\mathbb{R}$ dont la fonction de répartition coïncide, sur l'intervalle $[1,10[$, avec la fonction $\log_{10}$.

10. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Benford et si $F = \lfloor X \rfloor$ est sa partie entière (la partie entière est définie juste avant la question 5 de la partie A), montrer que :

$$\mathbb{P}\big(F=1\big) = \mathbb{P}\big(F \in \{2,3\}\big) = \mathbb{P}\big(F \in \{5,6,7,8,9\}\big) \ .$$

11. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Benford, quelle est la loi de $\log_{10}(X)$?
Indication : on pourra penser à calculer sa fonction de répartition.

On appelle *mantisse* d'un réel strictement positif x l'unique réel $M(x)$ appartenant à l'intervalle $[1,10[$ tel qu'il existe un entier relatif k pour lequel on puisse écrire $x = M(x) \times 10^k$. Par exemple, $M(123) = 1{,}23$ et $M(0{,}25) = 2{,}5$.

12. Soit k un entier strictement positif. Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]1,10^k[$, quelle est la loi de $M(X)$?

13. On rappelle que $\mathrm{frac}(x)$, défini juste avant la question 5, désigne la partie fractionnaire d'un réel x. Montrer que pour toute variable aléatoire strictement positive X on a :

$$\mathbb{P}\left(M(X) \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{frac}(\log_{10}(X)) \leqslant \log_{10}(x)\right) \ .$$

14. Pour tout entier n positif ou nul, soit $Y_n = 10^{Z_n}$, où Z_n est une variable aléatoire de densité f_n (fonction définie au début de la partie A). Montrer que :

$$\sup_{t\in[1,10]} \left|\mathbb{P}\big(M(Y_n) \leqslant t\big) - \log_{10}(t)\right| \to 0$$

quand n tend vers l'infini.

15. Soit Y une variable aléatoire réelle strictement positive telle que $M(Y)$ suit la loi de Benford. Montrer que pour tout réel c strictement positif, $M(cY)$ suit également la loi de Benford.