J. 15 1291

UHCE 554

SESSION 2015

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Cachan – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages, numérotées de 2 à 5.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Les trois exercices qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix.
Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.
Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Il sera fait grand cas lors de la correction de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Exercice 1

(1) Pour quelles valeurs de $r \in \mathbb{R}$ la série de terme général $(r^n)_{n\geqslant 0}$ est-elle convergente ? Lorsque la série converge, donner une formule simple pour

$$S_1(r) = \sum_{n\geqslant 0} r^n \ .$$

(2) Pour quelles valeurs de $r \in \mathbb{R}$ la série de terme général $((-1)^n r^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Lorsque la série converge, donner une formule simple pour

$$S_2(r) = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n r^{2n} \ .$$

Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

(3) Tracer, en le justifiant, le tableau de variations de f, puis la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f, en indiquant les valeurs prises par la fonction f en -1, 0 et 1. Ce tracé ayant vocation à être complété à la question suivante, il est recommandé de lui consacrer une surface suffisante.

(4) Écrire le développement limité à l'ordre deux de f en 0.
Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse zéro, en justifiant la position relative de cette tangente et de la courbe, au voisinage de 0 *et* globalement.

(5) Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine du plan situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$, au-dessus de l'axe des abscisses, à droite de l'axe des ordonnées et à gauche de la droite d'équation $x = 1$.

(6) Déduire de la question (2) que pour tout $x \in [0,1]$,

$$1 - x^2 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1 - x^2 + x^4 \ .$$

Ces deux inégalités sont-elles valables pour tout $x \in \mathbb{R}$?

(7) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}_1$, puis un encadrement de π.

(8) Soit $j \geqslant 1$ un entier. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{2j-1} (-1)^k x^{2k} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant \sum_{k=0}^{2j} (-1)^k x^{2k} \ .$$

En déduire un encadrement de π.

(9) Quelle valeur de j doit-on prendre pour obtenir un encadrement de π à 10^{-2} près ? Que se passe-t-il lorsque j tend vers l'infini ?

Exercice 2

Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. On définit

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Tr}_n : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{i,i} \end{array}$$

Ainsi, pour $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Tr}_2(B) = B_{1,1} + B_{2,2} = 1 - 6 = -5$.

(1) Montrer que Tr_n est une application linéaire.

(2) Déterminer, en justifiant votre réponse, le rang de Tr_n et la dimension de son noyau.

(3) On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.

(a) Déterminer une base du noyau de Tr_2.

(b) Soit I_2 la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$ et soit $D_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de la forme xI_2 avec $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $D_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et que $M_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_2) \oplus D_2(\mathbb{R})$.

(c) Soit $C_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $C \in M_2(\mathbb{R})$ telles que, pour toute matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$, on a $CB = BC$. Montrer que $C_2(\mathbb{R}) = D_2(\mathbb{R})$.

On revient maintenant au cas ou $n \geqslant 1$ est un entier quelconque.

(4) Montrer que, pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}_n(AB) = \mathrm{Tr}_n(BA)$.

Pour tous entiers $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on définit la matrice $E^{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ par ses coefficients $E^{i,j}_{i,j} = 1$ et $E^{i,j}_{k,l} = 0$ si $k \neq i$ ou $l \neq j$.

(5) Montrer que la famille $(E^{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$.

(6) Pour tous entiers $1 \leqslant i, j, k, \ell \leqslant n$ tels que $j \neq k$, montrer que $E^{i,j}E^{j,k} = E^{i,k}$ et $E^{i,j}E^{k,\ell} = 0$.

(7) Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $f(AB) = f(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $f(E^{i,j}) = 0$ si $i \neq j$ et que $f(E^{i,i})$ ne dépend pas de i.

(b) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(A) = x\,\mathrm{Tr}_n(A)$ pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(8) Soit $g : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer qu'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $g(A) = \mathrm{Tr}_n(AB)$ pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(9) A-t-on $\mathrm{Tr}_n(ABC) = \mathrm{Tr}_n(ACB)$ pour toutes matrices $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$? Justifiez votre réponse.

Exercice 3

Dans cet exercice, X est une variable aléatoire réelle dont la densité f est donnée par $f(x) = 1$ si $x \in [-1/2, 1/2]$ et $f(x) = 0$ sinon.

Partie I

(1) Calculer $\mathbb{P}(X \leq -1)$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X \geq 0)$.

(2) Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

(3) Les variables X et $-X$ sont-elles de même loi ?

(4) Est-ce que X et $|X|$ admettent une espérance ? Si oui, calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[|X|]$.

(5) Est-ce que $1/|X|$ admet une espérance ? Si oui, calculer $\mathbb{E}[1/|X|]$.

(6) Montrer que X^2 admet une espérance et calculer la variance de X.

(7) Montrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, $e^{\lambda X}$ admet une espérance, et calculer sa valeur.

Partie II

On considère aussi maintenant des variables aléatoires $(X_i)_{i \geqslant 1}$ toutes de même loi que X.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On suppose que les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont indépendantes. On définit ensuite les variables aléatoires m_n, M_n et S_n comme suit

$$m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

(8) Est-ce que S_n admet une espérance ? Si oui, calculer $\mathbb{E}[S_n]$.

(9) Donner une formule explicite pour la fonction de répartition de M_n.

(10) Donner une formule explicite pour la fonction de répartition de m_n.

(11) Les variables aléatoires m_n et M_n sont-elles indépendantes ?

(12) Calculer $\mathbb{P}(S_n \geqslant 0)$.

(13) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (e^x - e^{-x})/2$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda S_n}\right] = \left(\frac{f(\lambda/2)}{\lambda/2}\right)^n \ .$$

(14) Montrer que, pour tout réel $u \geq 0$, on a $\frac{f(u)}{u} \leq e^{u^2/6}$.

(15) Montrer que, pour tous réels $t, \lambda > 0$, on a $\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{-\lambda t + n\lambda^2/24}$.

Indication : On rappelle que, si Y est une variable aléatoire positive, alors, pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(Y \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{t}$.

(16) En déduire que, pour tout réel $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{-6t^2/n} \ .$$

(17) Soit Z une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. En utilisant la question précédente et le théorème de la limite centrée, montrer que, pour tout nombre réel $t > 0$, $\mathbb{P}(Z \geqslant t) \leqslant e^{-t^2/2}$.

(18) Montrer que $\mathbb{E}[|S_n|] \leqslant \mathbb{E}\left[S_n^2\right]^{1/2}$.

(19) En déduire que $\mathbb{E}[|S_n|] \leqslant \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{n}$.

(20) Conjecturer une valeur pour $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[|S_n|]}{\sqrt{n}}$ à l'aide du théorème de la limite centrée.

Partie III

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. On suppose que N admet une espérance, et on suppose aussi que pour tout entier $n \geqslant 1$, les variables aléatoires $N, X_1, X_2, \dots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes. On pose

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i, \qquad V = \max\{X_1, \dots, X_N\},$$

et on admet que S et V sont deux variables aléatoires. Précisons que, si $N(\omega) = 6$, $S(\omega) = \sum_{i=1}^{6} X_i(\omega)$.

(21) On suppose uniquement dans cette question que $\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(N = 2) = 1/2$. Calculer

$$\mathbb{P}(N = 1, S \in [0, 1/2]) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(N = 2, V \geq 1/3).$$

(22) Montrer que $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} |X_i|\right] = \frac{\mathbb{E}[N]}{4}$.
Indication : *on pourra admettre la formule* $\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \geqslant u)\, du$ *valable pour toute variable aléatoire positive* Y *qui admet une espérance. On pourra aussi utiliser la formule des probabilités totales avec les événements* $\{N = k\}$ *pour* $k \geqslant 1$.

(23) On suppose que $N - 1$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Calculer la fonction de répartition de V.