**Banque Lettres et Sciences Economiques et Sociales**

**Épreuve écrite de mathématiques 2016**

**Igor Kortchemski, Matthieu Lerasle**

**Durée** : 4 heures **Calculatrice interdite**

# Commentaires généraux

**Structure du sujet.** Le sujet était composé de trois parties indépendantes (deux exercices et un problème) et permettait d'aborder diverses notions couvrant les trois grands axes du programme. Nous avons porté une attention particulière à la progressivité des questions dans chaque partie pour proposer à tous les candidats des questions abordables sur chacun des grands thèmes du programme, avec également des questions de plus en plus difficiles permettant aux meilleurs candidats de se distinguer.

Le premier exercice d'analyse (avec un soupçon de probabilités) a ainsi permis de toucher aux notions d'analyse réelle, de dérivation, d'étude de fonctions, de suites, de séries, de théorème de transferts et de manipulation des équivalents. Le second exercice appliquait des outils d'algèbre linéaire à un problème de combinatoire. Nous avons pu tester les candidats sur les définitions de base en algèbre linéaire et sur les notions de familles libres et liées, d'applications linéaires, de noyau et d'image. Le problème, plus long, revenait sur des notions d'analyse (intégration, équivalents) et testait aussi les candidats sur les probabilités. Le problème a en particulier permis de vérifier leur connaissance des lois de base et leur aisance dans les calculs d'espérance via le théorème de transfert pour des variables aléatoires réelles discrètes et continues.

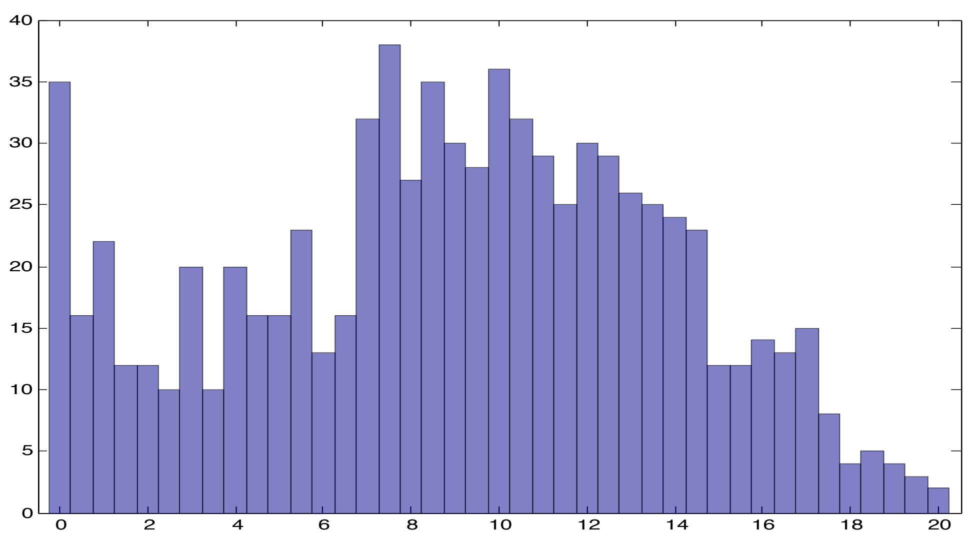


**Figure 1** – Histogrammes des notes de l'écrit.

**Bilan général.** Comme en 2015, les questions élémentaires ont permis d'étaler les copies les plus faibles qui n'ont pas atteint 10/20 et de récompenser les candidats ayant fourni un investissement minimal en mathématiques. Comme les années précédentes, les dernières questions de chaque partie, de plus en plus difficiles, ont bien permis de départager les meilleures copies.

Nous demeurons très satisfaits du niveau de ces meilleurs candidats qui, comme chaque année, abordent avec succès un grand nombre de questions et démontrent ainsi leur maîtrise de toutes les parties du programme. Ces excellents candidats feront à coup sûr de brillants élèves en mathématiques dans les écoles de la banque.

À l'opposé, les candidats les plus faibles sont encore très nombreux. En effet, près de 20% des copies n'obtiennent pas la note de 4/20 et nous semblent avoir abandonné les mathématiques. Ceci est d'autant plus regrettable que, compte tenu du nombre important de questions élémentaires, un investissement minimal permet d'éviter une telle note quasiment éliminatoire.

**Transformation des notes brutes.** Les copies étaient notées cette année sur 202 et la meilleure copie a obtenu une note brute de 155/202. Si on applique une transformation linéaire aux notes brutes en les multipliant par $\frac{20}{155}$ et en arrondissant au demi-point le plus proche, on obtient l'histogramme de la Figure 2. Celui-ci montre que les meilleures copies sont très nettement départagées.

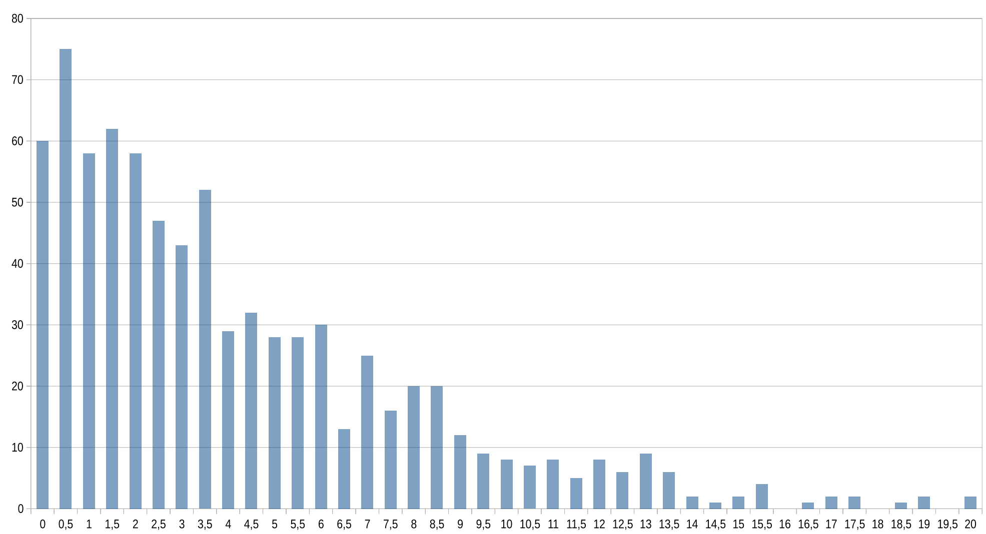


**Figure 2** – Histogrammes des notes de l'écrit qui seraient obtenues par transformation linéaire à partir de la note brute (la moyenne serait de 4.3/20).

Afin d'obtenir une courbe de notes, une moyenne, un écart-type et un pourcentage de notes $\geqslant 16/20$ similaire à ceux des autres matières, nous appliquons plutôt une transformation linéaire par morceaux pour obtenir une note finale sur 20 à partir de la note brute sur 202. Par exemple, à une note finale de 16/20 correspond en réalité une note brute de 95/202 (soit une note de 12.5/20 qui serait obtenue par transformation simplement linéaire). Ainsi, l'écart de niveau entre les copies ayant obtenu des notes finales de 16/20 et 20/20 est en fait assez conséquent, ce qui est en un certain sens regrettable. Cependant, l'oral permet de bien départager ces meilleurs candidats. Par ailleurs, cette transformation provient de la nécessité d'adéquation aux courbes de notes des autres matières.

**Difficulté du sujet.** Comme chaque année, nous avons souhaité proposer des questions de difficultés variées sur toutes les thématiques du programme. Nous donnons ici une classification des questions en groupes de difficulté croissante.

(1) Questions de cours, calculs numériques élémentaires, ou combinaison des deux : I.(1a)-(1c)-(3a), II.(1a)-(1b)-(2a)-(5), III.(1)-(2)-(3)-(6). En résolvant ces questions, on obtenait 11.5/20. En faisant la moitié de ces questions, on obtenait 8.5/20 (comme mentionné précédemment, le barème n'est pas linéaire et les premiers points sont plus faciles à obtenir).

(2) Questions classiques d'application du cours, ou demandant des calculs légèrement plus complexes ou abstraits : I.(1b)-(3b)-(4a)-(4b) II.(1c)-(2b)-(3)-(4)-(7a), III.(4)-(5a)-(5b)-(7)-(8). En résolvant intégralement les questions de niveau 1–2, on obtenait 17/20. En faisant la moitié des questions de niveau 1–2, on obtenait 13/20.

(3) Raisonnements courts mais non classiques, ou questions reposant sur la résolution correcte de questions les précédant : I.(2)-(5a)-(5b)-(6a), II.(2c)-(6)-(7b)-(7c), III.(9)-(10)-(11a)-(11b). En résolvant intégralement les questions de niveau 1–3, on obtenait 20/20. En faisant toutes les questions de niveau 1 et la moitié des questions de niveau 2–3, on obtenait 17.5/20.

(4) Raisonnements plus fins et questions difficiles : I.(6b), II.(7d)-(8), III.(12)-(13)-(14)-(15).

**Évolution par rapport à 2015.** La principale différence est le nombre de candidats : 802 cette année, contre 713 en 2015 (soit une augmentation d'environ 12%). La moyenne générale de l'épreuve reste stable (9.0/20 contre 8.9/20 en 2015), mais l'écart-type est en hausse (à 4.84 contre 4.51 en 2015). Cette évolution est principalement due à notre volonté d'étaler au maximum les notes. La moyenne hors copies très faibles ($\leqslant 4/20$) se situe toujours aux alentours de 10.5/20, ce qui permet de récompenser les bons candidats en mathématiques dans les différentes écoles de la banque.

Le tableau comparatif 1 permet de compléter cette analyse. La proportion des notes basses ($\leqslant 4.5/20$) est en légère diminution (21.6% contre 23.2% en 2015), mais la proportion d'excellentes notes ($\geqslant 16/20$) est en augmentation (8.5% contre 6.2% en 2015). En particulier, l'écart-type des notes $\geqslant 4$ est en légère augmentation (3.71 contre 3.4 en 2015), ce qui permet de valoriser les bons candidats en mathématiques. Les copies blanches ou vides ont presque disparu et les 200 moins bonnes copies se retrouvent bien réparties entre 0/20 et 5/20. Notons qu'il faut maintenant répondre à un peu plus de 2 questions correctement pour obtenir 5/20 (contre une seule en 2014).

Cette année encore, aucune question n'a semblé bloquer les candidats en début d'exercice. De nombreuses copies ont tenté avec succès un grand nombre de questions dans les trois parties. Les proportions de bonnes copies (notes $\geqslant 10/20$) et excellentes copies (notes $\geqslant 16/20$) sont en augmentation.

Cette évolution s'explique par l'augmentation du nombre de questions élémentaires. Par exemple, la fonction $s \mapsto 1/(1-s)^2$ à étudier au premier exercice est très simple, de même

**Table 1** – Éléments statistiques de comparaison entre les épreuves écrites de 2014, 2015 et 2016. Ces statistiques concernent l'ensemble des candidats inscrits à l'une au moins des écoles de la banque Lettres et Sciences économiques et sociales et présents à l'épreuve de mathématiques. Les copies « vides » sont les copies non blanches mais ayant obtenu la note zéro ; par exemple, celles des candidats s'étant bornés à recopier l'énoncé.

| | 2014 | 2015 | 2016 |
|---|---|---|---|
| Candidats présents | 708 | 713 | 802 |
| Copies blanches | 4 (0,6%) | 5 (0,7%) | 11 (1,4%) |
| Copies vides | 76 (10,7%) | 29 (4,1%) | 24 (3,0%) |
| Notes entre 0 et 1,5 | 94 (13,3%) | 57 (8%) | 85 (10,6%) |
| Notes entre 0,5 et 4,5 | 76 (10,7%) | 131 (18,4%) | 138 (17,2%) |
| Notes entre 10 et 20 | 311 (43,9%) | 316 (44,3%) | 371 (46,3%) |
| Notes entre 16 et 20 | 51 (7,2%) | 44 (6,2%) | 68 (8,5%) |
| Moyenne | 8,51 | 8,9 | 8,98 |
| Écart-type | 4,83 | 4,51 | 4,84 |
| Médiane | 8.5 | 9 | 9 |
| Moyenne hors zéros | 9,53 | 9,12 | 9,39 |
| Écart-type hors zéros | 4,05 | 4,34 | 4,55 |
| Médiane hors zéros | 9 | 9 | 9,5 |
| Moyenne des notes $\geqslant 4$ | 10,3 | 10,4 | 10,53 |
| Écart-type des notes $\geqslant 4$ | 3,5 | 3,4 | 3,71 |
| Médiane des notes $\geqslant 4$ | 10 | 10 | 10,5 |

que les questions sur la linéarité des applications du second exercice ou les nombreuses questions de cours du problème. Cette évolution volontaire nous permet de valoriser la rédaction sur ces questions, et de favoriser largement les candidats répondant de manière impeccable à quelques questions par rapport à ceux essayant à tout prix de traiter toutes les questions sans jamais le faire proprement. Quasiment toutes les questions peuvent être traitées en utilisant un ou parfois deux arguments très courts. Il est beaucoup plus satisfaisant pour nous de voir les candidats donner simplement cet argument plutôt que d'écrire de longues lignes de calculs parmi lesquelles nous sommes censés trouver la réponse attendue.

Ces dernières années, l'épreuve d'écrit a été adaptée au niveau des candidats. Elle propose davantage de questions simples et guidées, ainsi qu'un problème long dans lequel les candidats, même les plus modestes, doivent pouvoir s'exprimer. Ce nouveau format n'empêche aucunement la détection des très bons candidats, mais permet de mieux classer les très bons comme les plus faibles avec une bonne progression entre ces deux extrêmes, ce qui est important avec l'augmentation du nombre d'écoles dans la banque.

**Analyse des questions les plus faciles.** Les questions les mieux réussies sont les questions (1) et (2) de l'exercice 1, les questions (1a)-(2a)-(5) de l'exercice 2 et les questions (1)-(3)-(4) du problème. La question (6) du problème, question de probabilité élémentaire, a été légèrement moins bien réussie, mais elle n'a été tentée que par la moitié des candidats, probablement à cause de sa position dans l'énoncé.

On peut en déduire que la plupart des candidats maîtrisent les notions les plus basiques du programme, ce qui est tout à fait satisfaisant.

À l'avenir, nous continuerons autant que possible de proposer des questions élémentaires sur les trois parties du programme et nous encourageons tous les candidats à lire l'énoncé avant de commencer à rédiger leur copies de manière à identifier dès le début de l'épreuve les questions les plus faciles sur lesquelles une rédaction impeccable leur rapportera de nombreux points.

**Conclusion.** Un travail minimal en mathématiques nous semble toujours très fructueux et nous encourageons les futurs candidats à travailler les notions les plus élémentaires et les calculs de base en profondeur. Ce travail doit leur permettre de reconnaître et de rédiger proprement les questions les plus simples qui ne font appel qu'à une connaissance de base du cours. Cette année par exemple, ce travail permettait de répondre au minimum aux questions I.(1), II.(1a)-(2a)-(5) et III.(1)-(2)-(3)-(6). En les rédigeant convenablement, on obtenait déjà 11/20, ce qui évite sans problème l'élimination aux candidats les moins à l'aise en mathématiques.

À l'inverse, il est très difficile, voire impossible de réussir sans cet investissement. Ainsi, parmi les 270 sous-admissibles à l'ÉNS de Paris, seulement 8 ont obtenu moins de 7/20, environ 40 ont eu moins de 10/20. Parmi les 66 admissibles à l'ÉNS de Paris, la note la plus basse est 9.5/20, 6 ont eu moins de 13/20 et 26 ont eu moins de 15/20. La moyenne des admis à l'ÉNS de Paris se situe à 16.9 (contre 16.2 l'année dernière).

# Conseils aux candidats

Comme chaque année, nous profitons du rapport pour rappeler aux futurs candidats quelques conseils de base pour bien réussir l'épreuve de mathématiques.

**Rédaction.** L'épreuve de mathématiques exige rigueur et précision, il est parfaitement inutile et même néfaste de tenter de répondre à un grand nombre de questions si on ne soigne pas la rédaction. La rédaction des questions élémentaires doit être impeccable, et les candidats les plus modestes ont davantage intérêt à accorder du temps à ces questions de base qu'aux questions plus avancées des exercices. Il est toujours beaucoup plus difficile de récupérer des points sur les questions plus délicates qui exigent souvent d'avoir bien compris les notations du sujet et les questions précédentes.

Nous détaillons les principales attentes du jury quant à la rédaction de l'épreuve écrite et indiquons des erreurs courantes qu'il convient d'éviter. Une réponse bien rédigée doit montrer *sans ambiguïté* au correcteur que le candidat a trouvé une démonstration *complète*, *concise*, *sans argument erroné*, n'utilisant *que des résultats au programme* et *répondant bien à la question posée*.

(1) Ambiguïté : un candidat perdra systématiquement des points en laissant floue une partie de son raisonnement, ne serait-ce que parce qu'il se trouve toujours une dizaine d'autres copies levant la même ambiguïté avec un argument totalement faux. Ainsi, à la question II.(1b), plusieurs candidats n'ont pas su dire clairement s'ils montraient que 0 était solution ou si c'était la seule solution possible, affirmant souvent dans la même phrase qu'ils avaient démontré l'une ou l'autre de ces assertions. Ces candidats n'ont reçu aucun point à la question. En revanche, ceux qui ont simplement su dire que 0 était une solution en ont reçu. Il est très important en mathématiques de savoir ce que l'on fait, quitte à ne proposer qu'une réponse partielle.

(2) Démonstration complète : il est indispensable de mentionner tous les arguments dans la résolution d'une question de base. Par exemple, à la question I.3, nous avons pénalisé les candidats qui ne justifiaient pas que la fonction était dérivable, de même que ceux qui le justifiaient en disant juste que $f$ était un quotient de fonctions dérivables. Dans la question II.(1b), il ne fallait pas oublier de vérifier que 0 était bien solution après avoir démontré que c'était la seule possible.

De plus, il faut *toujours* mentionner un résultat prouvé dans une question précédente lorsqu'on l'utilise. Par exemple, pour la question I.(5b), les candidats qui n'ont pas précisé qu'ils utilisaient la question I.(3b) ont perdu une partie des points.

Nous avons pénalisé les copies tentant manifestement de grapiller des points en écrivant des assertions non justifiées et souvent fausses dans les questions plus difficiles.

(3) Démonstration concise : la plupart des questions de l'épreuve peuvent se résoudre à l'aide d'un argument très court. Nous valorisons toujours les candidats capables de mettre cet argument en évidence par rapport à ceux qui le délayent dans une suite de calculs ou de phrases sans intérêt. Ainsi, à la question II.4, il suffisait de dire que, pour $i \neq j$, puisque $S_i \cap S_j \subset S_i$, $\mathrm{card}(S_i) \geqslant \mathrm{card}(S_i \cap S_j) = \ell$.

(4) Arguments erronés : pire, énoncer une affirmation manifestement fausse ne peut pas servir le candidat, mais seulement jeter la suspicion sur tout ce qu'il écrit. Par exemple, dire que si $X$ admet une espérance alors $f(X)$ admet une espérance d'après le théorème de transfert montre un manque de maîtrise des concepts mentionnés. En ce sens, nous invitons les candidats à se méfier des « demi-souvenirs » qui peuvent amener à énoncer des énormités (comme *on reconnaît une loi uniforme sur* $\mathbb{N}^*$).

(5) Rédaction et sténographie : nous avons apprécié la disparition quasi-complète de signes cabalistiques ou notations non-standard, nous encourageons vivement les futurs candidats à poursuivre cet effort.

(6) Orthographe, erreurs de calculs : même en mathématiques, il est nécessaire de relire sa copie avant de la rendre de manière à éviter d'y laisser des fautes d'orthographe ou de calcul grossières, comme *Il faut distinguer de cas selon la nullité de* $X$, *on a donc démontrer le résultat* ou $(1/2)^2 = 1/2$. Même si nous ne pénalisons pas directement l'orthographe, ces erreurs laissent une très mauvaise impression.

(7) Nous insistons à nouveau sur la présentation de la copie et la lisibilité de l'écriture. Nous

avons cette année encore eu beaucoup de mal à déchiffrer certaines copies et probablement pénalisé des candidats croyant sans doute gagner un peu de temps en les négligeant.

**Honnêteté.** Il est très appréciable de voir les candidats aborder de nombreuses questions et nous souhaitons les encourager à travailler les mathématiques pour réussir au concours. Toutefois, nous rappelons qu'il est assez facile de repérer les copies qui tentent de répondre à une question de façon malhonnête. Ces tentatives de bluff sont particulièrement irritantes et pénalisent ensuite les candidats tout au long de la copie, toute ambiguïté étant ensuite systématiquement interprétée comme une erreur.

Les candidats sont également invités à s'interroger sur la cohérence des résultats annoncés sur leur copie. Par exemple, une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$ ne peut pas avoir un rang supérieur à 2. Repérer une incohérence permet généralement aux candidats de corriger une erreur. A minima, ceux-ci ont intérêt à la signaler s'ils n'ont pu la corriger. Nous n'hésitons jamais à valoriser une réponse correcte, même très partielle, du moment que ces limites sont clairement identifiées. Au contraire, toute tentative de bluff, réelle ou supposée, fera systématiquement perdre au candidat les points de la question et des points d'honnêteté sur la copie.

En effet, comme l'année dernière, nous avons récompensé les candidats faisant preuve de recul et d'honnêteté, en ajoutant au barème initial quelques points (autant que pour une question de difficulté moyenne) attribués uniquement en fonction de l'honnêteté et l'absence d'incohérences manifestes au sein de la copie. Ceci nous permet de mettre en avant les copies s'attachant à démontrer rigoureusement tout résultat présenté, même les plus modestes, par rapport aux copies racontant longuement des raisonnements obscurs dans l'espoir que nous cherchions le bon argument au milieu d'une longue liste sans intérêt. Recopier une question de l'énoncé ne peut jamais rapporter de point et demeure parfaitement inutile.

**Remarques spécifiques.** Nous avons souvent constaté des problèmes de logique élémentaire dans les copies, même parmi les très bonnes. Ainsi, dans la question II (2a), plusieurs candidats ont affirmé avoir démontré que 0 était solution alors qu'ils montraient que c'était la seule possible. De même dans la question II (3), les candidats ont eu des difficultés à dire s'ils venaient de démontrer une inclusion ou l'inclusion réciproque.

Le maniement des séries à termes réels de signe quelconque nous semble mal maîtrisé par les candidats, avec des confusions entre les notions de convergence, absolue convergence, divergence et absolue divergence.

Les hypothèses de récurrence sont souvent mal formulées (on a pu lire $P_n$ : « *Pour tout* $n \geqslant 1$ *[...]*) et le début de l'hérédité mal rédigé (on a pu lire *on suppose qu'il existe un* $n$ *tel que* $P_n$ *est vrai*).

De nombreux candidats font la confusion entre variables aléatoires discrètes et variables aléatoires continues dans l'application du théorème de transfert. Nous avons lu de trop nombreuses fois des formules de type $\mathbb{E}\left(Xe^{-\lambda X}\right) = \sum_{i=0}^{n} x_i e^{-\lambda x_i} \mathbb{P}\left(X = x_i\right)$ qui n'ont aucun sens. Les raisonnements commençant par « sous réserve d'existence » ou « si la variable aléatoire admet une espérance, celle ci vaut [...] » sont périlleux et mènent souvent à des erreurs (surtout dans le cas des variables aléatoires de signe non constant). De même qu'il est souvent plus sage de montrer une double implication que de raisonner par équivalences, nous conseillons aux candidats de d'abord vérifier qu'une variable aléatoire admet une espérance avant de la calculer.

Les candidats peuvent parfois être amenés à démontrer des résultats qu'ils auront vu pendant l'année afin de vérifier leur assimilation du cours. Dans ce cas, une justification de type « c'est un résultat du cours » est à proscrire.

Le sujet contenait des coquilles et imprécisions (questions I.(4), II.(8) et III.(9), voir ci-dessous) et nous nous en excusons. Cependant, cela ne semble pas avoir perturbé les candidats.

**Forme.** Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie que les réponses à un même exercice soient présentées dans l'ordre, et qu'en tous cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire. Nous sommes heureux de constater les efforts de la plupart des copies qui les rendent agréables à lire.

## Commentaires détaillés sur chaque exercice

Comme les années précédentes, en vue de préciser notre analyse des principales faiblesses observées dans les copies, nous indiquons pour chaque question le nombre de copies ayant obtenu au moins 75% des points ainsi que le nombre de copies l'ayant abordée (sur un total de 802 copies).

**Exercice 1.**

1. (a) [328 copies $\geqslant$ 75% sur 785 copies] La question demandait d'étudier les variations d'une fonction simple. Pour obtenir tous les points, il fallait bien justifier la dérivabilité de la fonction considérée et préciser ses limites en $0^+$ et en $1^-$. Les candidats ont très majoritairement abordé cette question et beaucoup y ont obtenu quasiment tous les points.
   (b) [324 copies $\geqslant$ 75% sur 610 copies] Il s'agissait ici de vérifier que les candidats savaient calculer l'équation d'une tangente à la courbe. Cette question a été là aussi bien réussie par les candidats qui avaient trouvé la valeur correcte de la dérivée à la question précédente.
   (c) [225 copies $\geqslant$ 75% sur 627 copies] La question demandait d'esquisser l'allure du graphe de la fonction simple, et de bien positionner la tangente dont l'équation venait d'être calculée. Il était judicieux de se placer dans un repère non-orthonormé. Nous avons sanctionné les graphiques qui n'étaient pas cohérents avec le tableau de variations ou avec l'équation de la tangente.
2. [286 copies $\geqslant$ 75% sur 650 copies] La question proposait de démontrer une formule par récurrence (c'est aussi un résultat qu'on obtient en dérivant la somme des N premiers termes d'une suite géométrique, mais le but était de tester la capacité à effectuer quelques calculs). La plupart des candidat a bien entamé le raisonnement par récurrence, appliquant en particulier correctement l'hypothèse de récurrence. Pour conclure le raisonnement, il suffisait ensuite de bien développer l'expression obtenue puis rassembler correctement les différents termes. Nous avons eu la désagréable impression que beau-

coup de candidats qui faisaient une erreur de calcul tentaient ensuite de la maquiller pour arriver au bon résultat. Ces copies visiblement malhonnêtes ont été lourdement sanctionnées.

3. Les questions (3a) et (3b) ont posé beaucoup de difficultés, y compris à quelques très bons candidats.
   (a) [53 copies $\geqslant 75\%$ sur 518 copies] Il suffisait dans cette question de dire que la série divergeait grossièrement car la suite sommée ne convergeait pas vers 0. Ce raisonnement pourtant élémentaire sur les séries numériques a posé de grandes difficultés. Les résultats de cette question nous semblent décevants.
   (b) [54 copies $\geqslant 75\%$ sur 426 copies] On pouvait ici utiliser le résultat de la question (2) puis utiliser un résultat bien connu sur les croissances comparées pour conclure. Plusieurs candidats ont perdu du temps ici à redémontrer le résultat de la question (2) en dérivant la somme des premiers termes d'une suite géométrique. D'autres ont ici invoqué "Le cours" ou "Les théorèmes classiques" pour conclure. Il doit être clair que nous attendons sur ce genre de questions que les candidats démontrent le résultat énoncé, une simple mention que le résultat a été vu pendant l'année ne rapporte aucun point.
4. (a) [106 copies $\geqslant 75\%$ sur 393 copies] Il s'agissait ici d'appliquer le théorème de transfert et de calculer la somme d'une suite géométrique, en faisant attention au premier terme. Le paramètre $\lambda$ n'était pas précisé dans l'énoncé mais cela n'a semble-t-il pas perturbé les candidats, qui ont le plus souvent supposé que $\lambda \geqslant 0$ (nous n'avons pas pénalisé les candidats sur ce point). Les tous meilleurs candidats ont vu qu'il fallait prendre $\lambda > -\ln(2)$. Dans le calcul de l'espérance, l'erreur la plus fréquente des candidats qui ont sérieusement abordé la question a été le calcul de la somme de la série géométrique qui commençait au terme $n = 1$ et non au terme $n = 0$.
   (b) [87 copies $\geqslant 75\%$ sur 236 copies] Il suffisait ici d'appliquer le théorème de transfert pour appliquer le résultat de la question (3b). Les candidats l'ont en général bien remarqué. Toutefois, les performances sur ces questions de difficulté intermédiaire nous ont semblé un peu décevantes. Il était certes nécessaire d'utiliser un résultat précédent mais nous constatons comme l'année dernière les difficultés des candidats avec le maniement des séries, même les plus classiques.
5. (a) [105 copies $\geqslant 75\%$ sur 549 copies] Cette question ne présentant pas de difficultés majeures a été une grande source de tentatives de grapillage. Dès que la rédaction n'était pas impeccable, avec une démonstration très propre, nous avons retiré tous les points. Nous avons remarqué ici plusieurs copies qui ont confondu fonction non nulle avec fonction ne s'annulant pas.
   (b) [112 copies $\geqslant 75\%$ sur 313 copies] Il s'agissait ici de dériver la fonction précédente et d'appliquer le résultat de la question (3). Les bons candidats qui avaient réussi les précédentes n'ont pas eu de difficulté à mener à bien ce raisonnement.
6. (a) [85 copies $\geqslant 75\%$ sur 233 copies] La dernière question de l'exercice a naturellement posé plus de difficultés. Il s'agissait dans cette partie d'appliquer le résultat de la question 3. Un bon nombre de candidats ayant abordé cette question y est arrivé sans

difficulté.

(b) [30 copies $\geqslant$ 75% sur 182 copies] Dans cette dernière question, il fallait utiliser la valeur de la somme à $x > 0$ fixé, simplifier la valeur obtenue, et enfin passer à la limite. Cette question nécessitant une bonne compréhension des questions précédentes, des calculs légèrement évolués et enfin un passage à la limite a naturellement été moins bien réussie. Plusieurs candidats ont pour autant réussi à finir cet exercice, ce qui est très satisfaisant.

**Exercice 2.**

1. (a) [345 copies $\geqslant$ 75% sur 661 copies] Il s'agissait ici simplement de dire que chaque $x_i^2$ était positif, donc que leur somme l'était aussi, ce qui impliquait que $\phi(X, X)$ était positif pour tout $X$ de $\mathbb{R}^n$. Les candidats qui ont négligé la rédaction en écrivant seulement $\phi(X, X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant 0$ ont été pénalisés.

   (b) [84 copies $\geqslant$ 75% sur 592 copies] Dans cette question élémentaire, nous avons apprécié les candidats qui ont su clairement mettre en évidence que 0 était la seule solution possible (par exemple avec un raisonnement par l'absurde), et ceux qui ont pensé à justifier que 0 était effectivement solution. En revanche, sur cette question, comme sur les autres, les candidats se limitant à écrire une suite de propositions soi-disant équivalentes (par exemple « $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ si et seulement si $X = 0$ ») n'ont pas obtenu les points.

   (c) [107 copies $\geqslant$ 75% sur 456 copies] Il suffisait ici de prendre par exemple $Y = X$, ou $Y$ égal aux vecteurs de la base canonique pour conclure proprement. Cette question a permis de tester le maniement des quantificateurs des candidats. Nous avons aussi lu de nombreuses fois que $\sum_i x_i y_i = 0$ *donc* $x_i y_i = 0$.

2. (a) [385 copies $\geqslant$ 75% sur 612 copies] Cette question a été la mieux réussie de l'exercice. Nous souhaitons à l'avenir que ce genre de questions soit réussie par tous les candidats. Pour la résoudre, il suffit en effet d'appliquer une des définitions les plus centrales du cours d'algèbre linéaire.

   (b) [56 copies $\geqslant$ 75% sur 458 copies] Nous pensions cette question élémentaire. En réalité, les candidats capables d'abord d'écrire que le rang de l'application était inférieur à 1 ont été trop rares. Ensuite, seuls les tous meilleurs ont été capables de distinguer le cas ou $X$ était le vecteur nul.

   (c) [31 copies $\geqslant$ 75% sur 285 copies] Cette question demandait de savoir manipuler proprement la définition d'un isomorphisme et de savoir la vérifier dans un cadre abstrait. Les résultats montrent ici que ce type de connaissance est rare au concours. Parmi les candidats capables d'aborder sérieusement la question, beaucoup pensent par exemple qu'une application linéaire injective en dimension finie est automatiquement surjective.

3. [108 copies $\geqslant$ 75% sur 473 copies] Cette question a posé de nombreuses difficultés de rédaction. Les copies écrivant simplement « $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(A \cap B)$ donc $A \subset B$ et $B \subset A$ donc $A = B$ » ont seulement reçu une très petite partie des points car nous nous attendions à une rédaction précise pour cette question. Invoquer la formule de Grassman et écrire $\mathrm{Card}(A + B)$ montre une mauvaise compréhension du cours.

4. [139 copies $\geqslant$ 75% sur 351 copies] Nous avons lu plusieurs fois que si $A \neq B$ alors $\mathrm{Card}(A \cup B) > \mathrm{Card}(A)$.
5. [338 copies $\geqslant$ 75% sur 583 copies] Environ la moitié des candidats qui ont abordé cette question ont écrit que « $\ell = 1$ car le cardinal de l'intersection des quatre sous-ensembles est 1 ».
6. [103 copies $\geqslant$ 75% sur 253 copies] Des candidats ont perdu du temps en se perdant dans des raisonnements très longs, alors qu'il suffisait d'écrire que $\phi(X_i, X_j) = \mathrm{Card}(S_i \cap S_j)$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Nous avons été attentifs à la précision de la rédaction, car de trop nombreux candidats ont écrit $X_j$ au lieu de $S_j$ et $\mathrm{Card}(X_j)$ au lieu de $\mathrm{Card}(S_j)$.
7. Cette question plus délicate a été moins bien réussie. Elle est typique des raisonnements certes légèrement originaux mais toujours très courts.
   (a) [60 copies $\geqslant$ 75% sur 230 copies] Il suffisait de dire qu'une famille de $m$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n$, avec $m > n$, était liée. Cet argument très court n'a pourtant été que rarement donné, probablement vu car assez abstrait.
   (b) [12 copies $\geqslant$ 75% sur 63 copies] Pour répondre à cette question, il s'agissait de développer, en faisant attention, la relation $\phi\left(\sum_{i=1}^{m} r_i X_i, \sum_{i=1}^{m} r_i X_i\right) = 0$. Là encore, le raisonnement est assez court mais demande de la lucidité en fin d'exercice ainsi qu'une bonne maîtrise des indices.
   (c) [17 copies $\geqslant$ 75% sur 32 copies] Il fallait ici utiliser la question précédente et séparer les termes diagonaux. La plupart des candidats qui ont réussi la question précédente ont également réussi celle-ci.
   (d) [1 copie $\geqslant$ 75% sur 43 copies] Cette question finale était en réalité beaucoup plus délicate que les précédentes. En effet, il fallait d'abord remarquer qu'au moins deux des $r_i$ devaient être non nuls, ce que seule une excellente copie a su faire.
8. [5 copies $\geqslant$ 75% sur 45 copies] Cette question posée de manière plus ouverte a été peu abordée (alors que, comme l'ont remarqué certains candidats, un exemple avec $m = n$ était donné précédemment). Une coquille s'est malheureusement glissée ici : pour la deuxième question, il fallait lire $\ell = n - 1$ au lieu de $k = n - 1$. Nous n'avons pas ainsi pas tenu compte de cette deuxième question dans la notation (mais les candidats ayant rectifié par eux-même ont été récompensés).

**Problème.**

1. [379 copies $\geqslant$ 75% sur 643 copies] Plusieurs copies rédigent mal un raisonnement par récurrence. On lit par exemple : $H_n$ *: « pour tout* $n \geqslant 1, \dots$ » ou encore, au moment de l'hérédité : *Supposons qu'il existe un entier* $n \geqslant 1$ *tel que* $H_n$ *soit vraie*.
2. [121 copies $\geqslant$ 75% sur 562 copies] Il y avait plusieurs possibilités pour résoudre la première partie de la question (étude d'un polynôme de second degré, étude de fonction ou encore récurrence). La seconde partie se résolvait avec une somme télescopique. Deux candidats ont fait preuve d'ingéniosité en disant que dans la somme $1^2 + \cdots + n^2$ chacun des $n$ termes est inférieur ou égal à $n^2$.
3. [202 copies $\geqslant$ 75% sur 433 copies] Nous avons relevé des imprécisions concernant l'utilisation des notations lim, $\sim$, $o(\cdot)$. Ainsi, nous avons pu lire $\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\lim_{x\to 0} \ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ou même $\ln(1+$

$x) = x - \frac{x^2}{2}$. De nombreuses copies commencent par un développement limité correct de $\ln(1+x)$ mais écrivent

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(x^2).$$

4. [217 copies $\geqslant 75\%$ sur 297 copies] Il s'agissait ici d'appliquer la définition de la partie entière, qui était rappelée en début d'exercice. Cette question a été globalement bien réussie par les candidats l'ayant abordée.
5. (a) [174 copies $\geqslant 75\%$ sur 413 copies] On pouvait ici, au choix, identifier une primitive de $x \mapsto xe^{-x^2/2}$ ou faire un changement de variables pour se ramener à l'intégrale de l'exponentielle. De nombreuses copies trouvent que $\mathbb{P}(R \geqslant u) = 1 + e^{-u^2/2}$ et continuent sans se préoccuper d'une probabilité plus grande que 1.
   (b) [60 copies $\geqslant 75\%$ sur 263 copies] On pouvait ici commencer par une intégration par partie pour reconnaître l'intégrale de Gauss, ou utiliser la symétrie de la fonction à intégrer ainsi que, comme indiqué, la variance de la loi normale centrée réduite. Plusieurs candidats ayant tenté cette question ont perdu des points en oubliant le facteur $\sqrt{2\pi}$ dans l'égalité $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.
6. [183 copies $\geqslant 75\%$ sur 414 copies] Il s'agissait ici de dire que $Z_n$ était bornée pour justifier l'existence de l'espérance. La calcul se ramenait ensuite une utilisation de la première question. De nombreux candidats n'ont pas souhaité faire l'effort ici de redémontrer ce résultat de cours en se contentant de dire qu'il s'y trouvait, et n'ont pas reçu tous les points. Mentionnons que de nombreuses copies ont pensé que $Z_n$ était une variable aléatoire continue.
7. [61 copies $\geqslant 75\%$ sur 267 copies] Il s'agissait d'appliquer le théorème de transfert puis d'utiliser les valeurs de la fonction cosinus aux points de la forme $k\pi$. Cette question a été correctement traitée dans les bonnes copies.
8. [36 copies $\geqslant 75\%$ sur 156 copies] Il fallait faire attention au fait que $xn$ n'était pas forcément entier, et distinguer suivant si $x < 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ ou si $x > 1$ ce que seules les très bonnes copies ont su faire.
9. [48 copies $\geqslant 75\%$ sur 219 copies] Cette question demandait d'utiliser la première question et de reprendre la définition de la partie entière. Sans être particulièrement difficile, en étant assez loin dans le sujet, elle demandait du recul. Par ailleurs, cette question contenait une imprécision dans la notation utilisée : il fallait lire $\lfloor u\sqrt{d} \rfloor$ au lieu de $[u\sqrt{d}]$, mais cela n'a pas perturbé les candidats qui ont abordé cette question.
10. [31 copies $\geqslant 75\%$ sur 118 copies] Il s'agissait d'utiliser la question (3) pour prolonger par continuité la fonction $f$ en 0.
11. (a) [18 copies $\geqslant 75\%$ sur 100 copies] La première partie de la question demandait d'appliquer la majoration de la partie entière et l'inégalité sur $d$ dans le bon ordre. Celle-ci e a été plutôt bien réussie par les candidats qui l'ont abordée. En revanche, seules les meilleures copie ont exploité la continuité de $f$ pour résoudre la seconde partie de la question.
    (b) [7 copies $\geqslant 75\%$ sur 50 copies] Il fallait mobiliser les résultats de plusieurs questions précédentes pour obtenir la limite de cette série à paramètre, ce que seules les toutes meilleurs copies ont su faire.

12. [2 copies $\geqslant$ 75% sur 109 copies] De très nombreuses copies ont tenté de grappiller des points en écrivant que $\mathbb{P}(N_d > n) = \mathbb{P}(\max(U_1, \ldots, U_d) > n)$. Seules deux copies ont parfaitement rédigé cette question (dont un excellent candidat, qui a proposé deux méthodes).
13. [3 copies $\geqslant$ 75% sur 20 copies] Il fallait avoir bien compris tout ce qui précédait : il s'agissait de prendre le logarithme de l'égalité de la question (12) et d'utiliser la question (11b).
14. [5 copies $\geqslant$ 75% sur 54 copies] Quelques bons candidats ont réussi à traiter entièrement cette question, en faisant attention à tous les termes dans l'application de la formule du binôme de Newton.
15. [aucune copie $\geqslant$ 75% sur 10 copies] Cette question très difficile n'a pas été sérieusement abordée.