Banque Lettres et Sciences Économiques et Sociales

ENS Paris – Épreuve écrite de mathématiques 2020

Nina Aguillon, Jérémie Bettinelli, Aurelia Deshayes, Cyril Marzouk

Durée : 4 heures **calculatrice interdite**

1 Commentaires généraux

Structure du sujet. Le sujet était composé de trois problèmes indépendants permettant d'aborder diverses notions couvrant les trois grands axes du programme. Nous avons porté une attention particulière à proposer aux candidat·es des questions abordables dans chaque partie, mais également à poser régulièrement des questions plus délicates pour permettre aux meilleur·es candidat·es de se distinguer.

Le sujet était calibré de sorte à ce que les bon·nes candidat·es aient le temps d'aborder la quasi-totalité des questions et que les meilleur·es puissent s'attarder sur les questions délicates, généralement placées en fin de problèmes. Le premier problème s'intéressait à loi de la distance à l'origine d'un point uniformément distribué sur $[0,1]^2$. Le second problème étudiait un système linéaire défini par récurrence et le troisième problème visait à minimiser $\|AX - Y\|$ pour un vecteur Y et une matrice non inversible A donnés.

Disposition particulières liées à la situation sanitaire. La crise due à l'épidemie de covid-19 a modifié l'organisation du concours cette année. Les épreuves se sont déroulées plus tard dans l'année et l'épreuve orale a été supprimée. Les épreuves écrites et orales ne testant pas les mêmes compétences, le barème de l'épreuve écrite a été ajusté de sorte à compenser le manque de l'épreuve orale. Ainsi, les questions mécaniques ont été dévalorisées au profit des questions de réflexion plus profonde et des questions montrant la bonne compréhension des problèmes.

Bilan général. Le sujet a permis de bien classer les candidat·es, y compris pour les faibles notes. La présence de questions simples sur beaucoup d'aspects du programme a récompensé les candidat·es ayant fourni un investissement minimal en mathématiques. Nous demeurons très satisfaits du niveau des meilleur·es candidat·es qui, comme chaque année, abordent avec succès un grand nombre de questions et démontrent ainsi leur maitrise de toutes les parties du programme.

Transformation des notes brutes. Chaque question du sujet était affectée d'un coefficient précisé plus bas. Un bonus/malus a également été introduit pour récompenser les rédactions propres, honnêtes et rigoureuses et pour pénaliser les rédactions brouillons, malhonnêtes, imprécises. Les copies étaient ainsi notées sur 57 points cette année. La meilleure copie a obtenu une note brute de 43.5 points.

Comme chaque année, une transformation linéaire par morceaux des notes brutes a permis d'obtenir des notes sur 20.

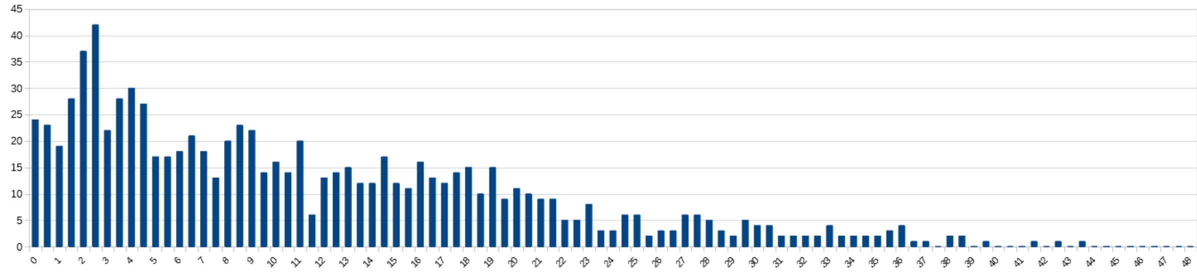

FIGURE 1 – Distribution des notes brutes.

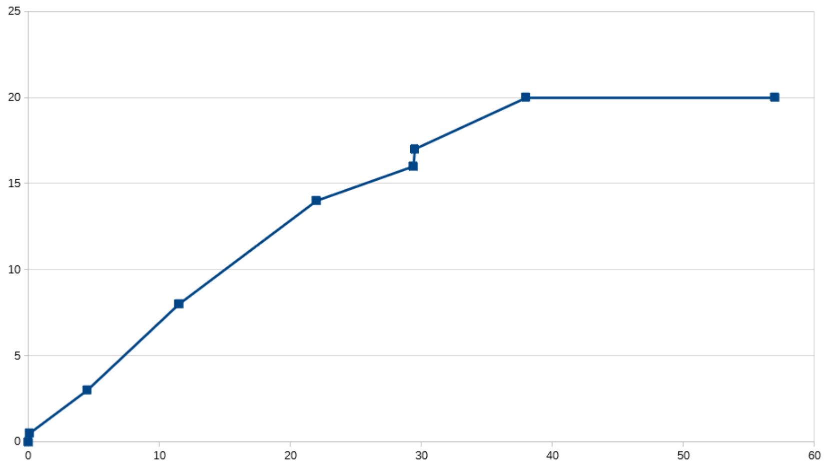

FIGURE 2 – Transformation linéaire par morceaux.

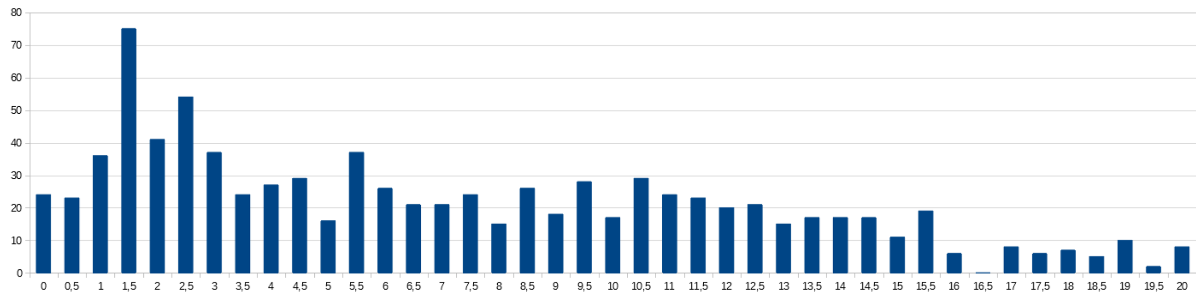

FIGURE 3 – Distribution des notes après transformation.

Cette transformation a pour effet d'étaler les copies ayant obtenues de faibles notes, ce qui récompense les candidat·es ayant fourni un investissement minimal en mathématiques, tout en conservant un écart satisfaisant entre les meilleures copies. L'absence d'oral fait qu'il n'était pas envisageable de trop tirer vers le haut les bonnes notes, au détriment des très bonnes notes. Les quelques excellentes copies ont de plus été signalées explicitement à la direction du concours. Le décrochement au niveau de 0 permet de distinguer les copies ayant obtenu 0 en note brute des autres. Ainsi les 24 copies ayant obtenu la note finale de 0 sont exactement celles qui ont obtenu la note brute de 0. Le décrochement avant 30 permet de créer un « trou » entre les notes finales de 16 et 17, qui correspond à peu près à la barre d'admission.

Sur les notes finales, la moyenne est 7.1, la médiane est 6.0 et l'écart-type est 5.2. Il est à noter que plus d'un quart des copies obtiennent sur la note brute moins de 4 points et la médiane des notes brutes se situe à 9. Ainsi, une masse importante de très faibles copies fait qu'il n'est pas envisageable d'obtenir une médiane ou une moyenne comparable à celles des autres matières. Cela se ferait au détriment des copies ayant traité de façon satisfaisante au moins quelques questions.

2 Conseils aux candidat·es

Comme chaque année, nous profitons du rapport pour donner aux futur·es candidat·es quelques conseils de base pour bien réussir l'épreuve de mathématiques.

Honnêteté. Il est très appréciable de voir les candidat·es aborder de nombreuses questions. Toutefois, nous rappelons qu'il est immédiat de repérer les copies qui tentent de répondre à une question de façon malhonnête ou de grappiller des points. Ces tentatives de bluff sont particulièrement irritantes et pénalisent ensuite les candidat·es tout au long de la copie, toute ambigüité étant ensuite systématiquement interprétée comme une erreur.

Les candidat·es sont également invité·es à s'interroger sur la cohérence des résultats annoncés sur leur copie. Par exemple, si vous aviez compris en *(7)(b)* qu'il s'agissait de montrer que χ n'avait qu'un unique zéro, la question suivante devait vous remettre dans la bonne direction. Repérer une incohérence permet généralement de corriger une erreur. À défaut de réussir à la corriger, les candidat·es ont intérêt à la signaler. Nous n'hésitons jamais à valoriser une réponse correcte, même très partielle, du moment que ses limites sont clairement identifiées. Au contraire, toute tentative de bluff, réelle ou supposée, fera systématiquement perdre les points de la question et jettera le doute sur le reste de la copie.

Si vous n'arrivez pas à démontrer un résultat, ne tentez pas de dire que c'est évident. Cela irrite les correcteur·trices et sème le doute quant à votre sincérité. Mieux vaut une copie qui accepte et montre ses limites qu'une copie malhonnête.

Rédaction. L'épreuve de mathématiques exige rigueur et précision, il est parfaitement inutile et même néfaste de tenter de répondre à un grand nombre de questions si on ne soigne pas la rédaction. Quasiment toutes les questions peuvent être traitées en utilisant un ou parfois deux arguments très courts. La rédaction des questions élémentaires, de plus en plus nombreuses, joue un rôle important dans la notation, qui favorise largement les candidat·es répondant de manière impeccable à quelques questions par rapport à celles et ceux essayant à tout prix de traiter toutes les questions sans jamais le faire proprement.

Ainsi, la multiplication des questions élémentaires doit inviter les candidat·es les plus modestes à accorder davantage de temps à ces questions de base qu'aux questions plus avancées des exercices. Il est toujours beaucoup plus difficile de récupérer des points sur les questions plus délicates qui exigent souvent d'avoir bien compris les notations du sujet et les questions précédentes.

Nous détaillons les principales attentes du jury quant à la rédaction de l'épreuve écrite et indiquons des erreurs courantes qu'il convient d'éviter. Une réponse bien rédigée doit montrer *sans ambigüité* au jury que le candidat a trouvé une démonstration *complète*, *concise*, *sans argument erroné*, n'utilisant *que des résultats au programme* et *répondant bien à la question posée*.

— **Ambigüité ou démonstration incomplète.** Un·e candidat·e perdra systématiquement des points en laissant floue une partie de son raisonnement, ne serait-ce que parce qu'il se trouve toujours une dizaine d'autres copies levant la même ambigüité avec un argument totalement faux. Il est très important en mathématiques de savoir ce que l'on fait, quitte à ne proposer qu'une réponse partielle.

Il est indispensable de mentionner tous les arguments dans la résolution d'une question de base. Par exemple, à la question *(2)(c)*, il fallait mentionner que la fonction racine carré est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$.

De plus, il faut toujours mentionner un résultat prouvé dans une question précédente **lorsqu'on l'utilise**. Il n'est pas nécessaire d'indiquer qu'on admet une question qu'on n'arrive pas à démontrer. Ce qui est nécessaire est d'indiquer clairement les résultats des questions précédentes que l'on utilise, peu importe si on a réussi ou non à les démontrer. Par exemple, en *(10)*, on peut dire « D'après le question *(9)* appliquée à $z_i = [\dots]$, on a [...] ».

Nous avons pénalisé les copies tentant manifestement de grappiller des points en écrivant des assertions non justifiées et souvent fausses dans les questions plus difficiles.

— **Précision.** Insistons une fois de plus sur le fait qu'il faut répondre aux questions posées. En *(1a)* par exemple, il était attendu une réponse comme $\mathrm{Re}((e^{i\theta})^2) = \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ et $\mathrm{Im}((e^{i\theta})^2) = \sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$ et et non $(e^{i\theta})^2 = \cos(2\theta) + 2i\sin(2\theta)$.

— **Concision.** La plupart des questions de l'épreuve peut être résolue à l'aide d'un argument très court. Nous valorisons toujours les candidat·es capables de mettre cet argument en évidence par rapport à celles et ceux qui le délayent dans une suite de calculs ou de phrases sans intérêt.

— **Arguments erronés.** Énoncer une affirmation manifestement fausse ne peut que jeter la suspicion sur toute la copie.

— **Rédaction et sténographie.** Nous avons apprécié la disparition quasi-complète de signes cabalistiques ou notations non-standard, nous encourageons vivement les futur·es candidat·es à poursuivre cet effort.

— **Orthographe, erreurs de calculs.** Même en mathématiques, il est nécessaire de relire sa copie avant de la rendre de manière à éviter autant que possible d'y laisser des fautes d'orthographe ou de calcul grossières.

— **Présentation de la copie.** Nous insistons à nouveau sur la présentation de la copie et la lisibilité de l'écriture. Nous avons cette année encore eu beaucoup de mal à déchiffrer certaines copies et probablement pénalisé des candidat·es croyant sans doute gagner un peu de temps en les négligeant. Nous rappelons qu'un argument illisible est systématiquement considéré comme faux.

Forme. Il est souhaitable de présenter sa copie le plus clairement possible. En particulier, le jury apprécie que les réponses soient présentées dans l'ordre, et qu'en tous cas les éléments de réponse à une même question soient rassemblés en un seul endroit, sauf mention explicite du contraire (en cas d'oubli et de manque de place). Il est également apprécié que les conclusions soient mises en valeur par exemple en les encadrant, en les soulignant ou en les surlignant. Nous sommes heureux de constater les efforts dans la plupart des copies qui les rendent agréables à lire.

Il n'est pas souhaitable de recopier l'énoncé. En plus de faire perdre du temps aux candidat·e, cela est contreproductif car cela rend la copie plus difficile à lire et les réponses plus difficiles à cerner pour les correcteur·trices.

Depuis cette année, les copies sont numérisées. Cela implique d'utiliser des stylos noirs ou bleus. Néanmoins, pour la mise en lumière des résultats, nous avons observé que surligner, souligner ou encadrer à l'aide de n'importe quelle couleur passait bien au scanner et ne posait aucun problème de lecture. Nous encourageons donc les candidat·es à continuer ainsi. Attention toutefois à ne pas utiliser de crayon de papier, notamment pour les illustrations (graphes, tableaux, etc.), car cela ne passe pas bien.

3 Erreurs les plus fréquentes

Nous signalons ici quelques erreurs ou confusions commises dans plusieurs copies :

- Certes, le carré d'un nombre réel est toujours positif mais cela ne fait pas partie de la définition du carré.
- Beaucoup trop de candidat·es confondent les inégalité larges et strictes. Par exemple, la négation de $x < y$ est bien souvent $x > y$.
- Un nombre significatif de candidat·es ont fait de l'excès de zèle à la question *(13)* et ont calculé les dérivées partielles secondes sans que cela soit demandé dans l'énoncé.
- Même si on le conteste, il est plus avisé d'utiliser le pluriel d'extremum présent dans le texte de l'énoncé, à savoir « extremums » dans le cas présent, au risque d'irriter les auteurs qui ont peut-être sciemment choisi cette forme.
- Attention à ne pas utiliser des hypothèses en dehors des questions où elles s'appliquent. Par exemple, on ne pouvait pas utiliser l'hypothèse de *(5)* pour répondre à *(6)(d)*. En revanche, il était judicieux d'utiliser le résultat de *(7)(b)* pour traiter *(7)(e)*.

4 Commentaires détaillés

Chaque question a été notée au quart de point et pondérée en fonction de sa difficulté. En vue de préciser notre analyse des principales faiblesses observées dans les copies, nous indiquons dans le tableau suivant pour chaque question le coefficient appliqué, la moyenne sur 4 obtenue par les candidat·es ayant abordé la question, le pourcentage de copies ayant abordé la question, le pourcentage de copies ayant obtenu au moins la moitié des points et le pourcentage de copies ayant obtenu au moins trois quart des points.

884	1a	1b	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	3e	4a	4b	4c	4d	4e	4f	4g
(coeff)	1,5	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	2,0	1,5	1,0	1,0	1,5	1,5	1,0	2,0	1,0
moy	1,9	2,8	2,9	3,0	1,9	2,0	1,3	1,0	1,3	1,4	1,7	2,4	2,1	0,5	1,0	0,4	0,4	1,3
au moins 0	64	45	98	90	94	80	66	54	30	43	34	55	43	40	14	10	5	5
au moins 2	34	32	80	68	47	44	23	14	10	15	14	34	25	5	3	1	0	1
au moins 3	23	31	62	68	39	30	17	8	8	11	11	33	20	5	2	1	0	1

884	5	6a	6b	6c	6d	7a	7b	7c	7d	7e	7f	7g	7h	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
(coeff)	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,5	1,5	1,0	1,0	1,5	2,0	2,0	2,0	0,5	0,5	2,0	1,5	1,0	0,5	0,5	0,5	1,5	1,0	2,0	1,5	2,0	2,0
moy	2,1	2,9	2,0	2,8	1,3	2,3	1,0	1,4	2,6	0,9	1,9	2,0	0,2	1,0	2,3	2,2	2,8	3,2	3,5	3,4	3,5	1,4	2,0	1,8	2,2	0,6	0,2
au moins 0	65	73	64	42	35	63	54	32	40	31	18	8	5	62	77	62	51	87	81	71	89	62	44	31	19	11	7
au moins 2	45	54	36	31	7	46	14	13	27	7	9	5	0	16	50	35	36	70	71	61	79	22	22	16	11	1	0
au moins 3	19	52	28	27	3	25	10	11	26	2	8	4	0	12	37	29	34	70	69	59	78	18	19	9	10	0	0

Notons que certaines questions, pourtant très basiques, ont été fortement valorisées afin de distinguer les candidat·es ayant fourni un investissement minimal.

PROBLÈME A.

(1) *(a)* Nous avons été surpris de voir tant d'échec sur cette question.

(b) Il s'agissait de déduire l'égalité à partir de la question précédente. Beaucoup de candidat·es se ont donné une autre démonstration à l'aide de la formule d'Euler. Cela n'a pas été sanctionné.

(2) Très peu de candidat·es ont reconnu ici l'équation d'un demi-cercle. Sans que cela soit indispensable ici, cela aidait l'intuition.

(a) Il fallait donner une justification, si concise soit-elle.

(b) Il s'agissait d'établir la parité de φ. Peu de candidat·es ont noté que l'ensemble de définition était bien symétrique.

(c) La justification de la dérivabilité a été rarement donnée. On ne pouvait pas se contenter d'une justification du type « d'après les théorèmes généraux » sans plus d'information, il fallait préciser que la fonction racine est dérivable sur $\mathbf{R}_+^\star$ et que $1 - x^2 > 0$ si et seulement si $|x| < 1$. On ne peut pas non plus simplement observer que la formule de la dérivée « ne fonctionne pas » en $x = \pm 1$.

(d) Il fallait que le graphe fasse apparaitre les bonnes variations, soit raisonnablement symétrique et ne pas oublier de faire **apparaitre la tangente** en -1, ainsi que son symétrique en 1.

(3) *(a)* Il s'agissait bien de **tracer** les ensembles demandés. Nous nous attendions à voir des disques ou demi-disques mais pas à toutes les horreurs que nous avons pu observer. Nous ne pensions pas non plus que $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}$ serait si fréquemment confondu avec $\mathcal{Q}_{\frac{1}{4}}$.

(b) La réponse attendue était que c'est l'aire du quart de disque de rayon 1, soit $\frac{\pi}{4}$. Un calcul similaire à (d) a également été fréquemment rencontré et accepté.

(c) Cette question a assez rarement été convenablement justifiée.

(d) Les candidat·es ayant tenté cette question s'en sont généralement bien sorti·es. La présence du résultat a probablement grandement aidé.

(e) Cette question ne posait pas de difficulté, si ce n'est d'avoir réussi à trouver les probabilité en jeu. Les candidat·es ayant donné un raisonnement correct basé sur de précédent résultats erronés ou utilisant des résultats à déterminer ont été récompensé·es.

(4) *(a)* Aucune difficulté ici, si ce n'est que certain·es ont voulu donné un ensemble discret ou confondent $[0, \sqrt{2}]$ et $[\![0, \sqrt{2}]\!]$.

(b) Il n'était pas attendu de preuve que $\mathbb{P}(X \leq t) \in]0, 1[$ pour $t \in]0, \sqrt{2}[$. Nous n'avons pas sanctionné l'inclusion ou non de 0 et $\sqrt{2}$ dans les ensembles attendus.

(c) Beaucoup de bluff pour cette question. Les candidat·es ayant vu qu'il fallait faire un changement de variable ont généralement réussi.

(d) Il fallait justifier que $[D \leq t] = [(X, Y) \in \mathcal{Q}_t]$.

(e) Question très rarement comprise.

(f) Une poignée de bonnes réponses. Un dessin permettait d'obtenir une bonne partie des points.

(g) Bien réussie lorsque comprise.

PROBLÈME B.

(5) Ne pas oublier de dire que $a \neq 0$ (ou $b \neq 0$) avant de diviser.

(6) *(a)* Ne pas oublier de mentionner que l'égalité $F_{k+1} = MF_k$ provient de l'énoncé (et non se devine du résultat à démontrer). De nombreuses tentatives de raisonnement par récurrence.

(b) Beaucoup semblent oublier que l'on manipule des matrices et des vecteurs et non des réels. Il ne s'agit pas d'une « suite géométrique » au sens connu des candidat·es. Il faut donc justifier que la formule se généralise à ce cas, à l'aide d'une récurrence immédiate (qu'il n'est pas nécessaire de détailler longuement). Beaucoup d'erreur d'initialisation ($G_k = \Lambda^k G_1$) ou de réponses insensées du type « $G_k = G_1 \Lambda^{k-1}$ ». Rappelons également qu'il convient de répondre à la question posée et non à une question similaire ($G_k = \Lambda^k G_0$ ou $G_{k+1} = \Lambda^k G_1$).

(c) Les limites de matrices ne sont pas au programme, c'est pourquoi nous demandions de montrer que les coefficients des matrices (qui constituent des suites numériques) convergent. On ne pouvait pas dire que $\Lambda^k \to \mathbf{0}_{nn}$, à moins de préciser ce qu'on entend par cette notation. On ne peut pas utiliser le résultat que $\Lambda^k \to \mathbf{0}_{nn}$ implique $\Lambda^k G_1 \to \mathbf{0}_n$ sans démonstration. Nous avons toutefois assez facilement accordé les points, à condition que soit donnée clairement l'expression de Λ^k montrant que ses coefficient tendent tous vers 0.

(d) Nous avons été beaucoup plus stricts sur cette question et n'avons que rarement accordé tous les points. Non, le fait que $QF_k \to \mathbf{0}_n$ n'implique en général pas que $F_k \to \mathbf{0}_n$, quand bien même Q n'est pas la matrice nulle. Une fois de plus, nous ne sommes pas dans $\mathbf{R}$. De toute façon, de tels résultats n'étant pas au programme, il fallait démontrer à la main que, les coefficients de $F_k = PG_k$ étant des combinaisons linéaires à coefficients constant en les coefficients de G_k, ils tendent tous vers 0. Le plus simple étant probablement de l'écrire explicitement en introduisant les coefficients de P.

(7) Beaucoup de candidat·es ont traité la totalité de cette question avec l'hypothèse supplémentaire $r + rs = 1$.

(a) Beaucoup de candidat·es pensent qu'une fonction dérivable admet un extremum en un point si et seulement si sa dérivée s'annule en ce point.

(b) Certain·es ont mal lu l'énoncé et ont cherché à démontrer que χ ne s'annulait qu'une fois sur $\mathbf{R}$. La question suivante aurait dû leur faire voir leur erreur. Dans le même genre d'idée, nombre de candidat·es ont tenu à montrer que χ avait nécessairement 3 zéros. Même si le tableau de variation indique beaucoup d'informations, il convient de mentionner explicitement toutes les hypothèses du théorème de la bijection. Une justification « d'après le tableau de variation » n'est pas suffisante.

(c) Bien réussie lorsque comprise.

(d) Bien réussie lorsque comprise.

(e) Beaucoup de candidat·es ont oublié que χ n'avait qu'un zéro strictement positif. De nombreux·ses candidat·es sont arrivé·es à montrer que $|\lambda_2| < |\lambda_1| \leq \lambda_3$ mais vraiment très peu ont justifié l'inégalité stricte. Celle-ci rapportait la moitié des points.

(f) Bien réussie lorsque comprise.

(g) Pour appliquer *(6)(d)*, il convenait de montrer que l'hypothèse était vérifiée, à savoir que M était diagonalisable.

(h) Question difficile. La réponse attendue était $|\lambda_1| = |\lambda_2| < \lambda_3$ avec, bien attendu, la preuve. Aucune copie n'a obtenu cette réponse. Quelques rares points ont toutefois été accordés, en remarquant par exemple l'égalité $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ car les racines sont conjuguées.

PROBLÈME C.

(8) Il était attendu une réponse mathématique, à savoir que minimiser cette somme de termes positifs revenait à s'approcher le plus possible du cas idéal où chacun des termes est nul en minimisant l'écart à cette situation où la fonction est nulle. En aucun cas minimiser la fonction revient à annuler le plus grand nombre de termes possible.

(9) Un nombre invraisemblable de démonstrations insensées pour une question de cours basique.

(10) Il fallait utiliser la question précédente **en le mentionnant** ; nous n'avons pas sanctionné les copies où ce résultat était démontré à nouveau.

(11) Dans l'ensemble bien réussi.

(12) Dans l'ensemble bien réussi. Attention aux erreurs de calcul.

(13) Dans l'ensemble bien réussi.

(14) Des preuves parfois longues pour diviser une ligne par 2 et l'autre par 6. Régulièrement, et pour des raisons assez obscures, seule une implication (l'une ou l'autre) a été montrée.

(15) Dans l'ensemble bien réussi.

(16) La méthode était généralement connue et bien appliquée. Attention à ne pas oublier de préciser la nature de l'extremum.

(17) Beaucoup confondent $\mathbf{u}_i(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$, qui n'a pas de sens. Beaucoup ne savent pas exprimer $\mathbf{u}_i(\mathbf{x})$ en fonction des coefficients de A et ceux de $\mathbf{x}$.

(18) Il a été souvent obtenu que $\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}) + 2\left\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}'), \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{y} \right\rangle + \left\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}'), \mathbf{u}(\mathbf{x}') \right\rangle$. L'utilisation de la transposition a posé problème. On a souvent lu qu'il fallait « composer par $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ » et que $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \circ \mathbf{u}$ était l'identité.

(19) Il ne fallait pas oublier de dire que tout $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ s'écrit $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{x}'$ et de justifier que $\left\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}'), \mathbf{u}(\mathbf{x}') \right\rangle \geq 0$, le plus simple étant de dire que ce dernier terme est égal à $\|\mathbf{u}(\mathbf{x}')\|^2$.

(20) Question difficile. Les candidat·es ayant abordé cette question ont souvent sorti le s du terme linéaire mais rarement du terme quadratique. Elles·ils ont ainsi souvent proposé une valeur de s qui dépendait de $\mathbf{x}'$ et donc de s lui-même.

(21) Question très difficile, surtout dans le sens indirect. Le sens direct a été traité dans quelques copies, surtout lorsqu'il avait été remarqué que $\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}) + \|\mathbf{u}(\mathbf{x}')\|^2$ lorsque $\mathbf{x}$ est un minimiseur. Le sens indirect n'a jamais été traité.