Informations importantes

- *Les problèmes sont indépendants les uns des autres.*
- *On peut utiliser les résultats de questions précédentes, en l'indiquant* **au moment de les utiliser**.
- *Il est demandé de* **soigneusement numéroter les questions**.
- *Il est demandé de* **mettre les réponses en évidence**, *en les* **surlignant**, *en les* $\boxed{\textit{encadrant}}$, *ou, a minima, en les* <u>*soulignant*</u>. *L'utilisation de crayon de papier n'est pas recommandée.*
- *Il sera fait grand cas de la* **clarté**, *de la* **concision** *et de la* **précision** *de la rédaction.*

PROBLÈME A.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices réelles $k \times k$, ainsi que I_k la matrice identité de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$. On considère l'application

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, y + 2z, z) \end{array} .$$

(1) *(1a)* Montrer que a est une application linéaire et exprimer la matrice A représentant a dans la base canonique.

(1b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse A^{-1}.

(1c) Calculer A^2.

(1d) Calculer $(A - I_3)^2$.

(1e) Pour tout entier $k \geq 1$, calculer la trace $\mathrm{Tr}(A^k)$ de la matrice A^k.

(2) *(2a)* Déterminer l'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres de a.

(2b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_k[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à k. On rappelle que la famille $\mathcal{B}_k = \{x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, \ldots, x \mapsto x^k\}$ forme une base de $\mathbf{R}_k[x]$. *Attention au fait que le j-ème élément de cette base est la fonction polynomiale $x \mapsto x^{j-1}$.* On fixe un entier $n \geq 1$ et on considère l'endomorphisme

$$b : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[x] \\ P & \longmapsto & (x \mapsto P(x+1)) \end{array} ,$$

dont on note B la matrice dans la base $\mathcal{B}_n$.

(3) *(3a)* Pour $1 \leq i \leq n+1$ et $1 \leq j \leq n+1$, exprimer le coefficient $B_{i,j}$ d'indices i et j de la matrice B.

(3b) Montrer que b est bijective et calculer l'application réciproque b^{-1}.

(3c) On note B^{-1} la matrice de b^{-1} dans la base $\mathcal{B}_n$. Pour $1 \leq i \leq n+1$ et $1 \leq j \leq n+1$, exprimer le coefficient $(B^{-1})_{i,j}$ d'indices i et j de la matrice B^{-1}.

(4) Déterminer l'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres de b.

On note $Id\colon \mathbf{R}_n[x] \to \mathbf{R}_n[x]$ l'endomorphisme identité.

(5) *(5a)* Donner l'image de $\mathbf{R}_0[x]$ par l'endomorphisme $b - Id$, c'est-à-dire l'image de la restriction de $b - Id$ au sous-espace vectoriel $\mathbf{R}_0[x]$.

(5b) Pour $1 \leq k \leq n$, donner le noyau et l'image de la restriction de $b - Id$ au sous-espace vectoriel $\mathbf{R}_k[x]$.

(5c) Calculer $(B - I_{n+1})^{n+1}$.

On définit les polynômes

$$E_0\colon x \mapsto 1\,, \quad E_1\colon x \mapsto x\,, \quad E_2\colon x \mapsto \frac{x(x-1)}{2}\,, \quad \ldots, \quad E_n\colon x \mapsto \frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{n!}$$

et on admet que la famille $\mathcal{E}_n = \{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ forme une base de $\mathbf{R}_n[x]$.

(6) Exprimer la matrice M de $b - Id$ dans la base $\mathcal{E}_n$.

On fixe dorénavant un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[x]$ et on note, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$P_k\colon x \mapsto P(x+k)\,.$$

(7) *(7a)* Pour $k \in \mathbf{N}$, exprimer P_k à l'aide de P et de l'endomorphisme b.

(7b) Trouver des réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$, non tous nuls, tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k = 0$.

(8) *(8a)* Soit $Q \in \mathbf{R}_n[x]$ un polynôme vérifiant $Q(x) = x^n \varepsilon(x)$ où $\varepsilon\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction vérifiant $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. Calculer Q.

(8b) Pour $k \in \mathbf{N}$, exprimer P_k dans la base $\mathcal{B}_n$ à l'aide des dérivées successives de P.

Problème B.

Pour le moment, on fixe un entier $M \geq 3$. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère une variable aléatoire U_n de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, M\}$. On suppose que, pour tout $k \geq 1$, les variables aléatoires $U_1, U_2, \ldots, U_k$ sont indépendantes.

(9) *(9a)* Donner, *sans calcul*, l'espérance $E[U_1]$ de la variable aléatoire U_1.

(9b) Donner, *sans calcul*, la variance $V[U_1]$ de la variable aléatoire U_1.

On définit les variables aléatoires Y et W par

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } U_1 \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\,, \qquad W = \begin{cases} 1 & \text{si } U_2 \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\,.$$

(10) *(10a)* Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.

(10b) Calculer l'espérance $E\big[(Y+W)^2\big]$.

Pour tout $n \geq 1$, on note X_n le nombre de valeurs différentes que les n variables $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ont prises, c'est-à-dire que X_n est le cardinal de l'ensemble $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$.

(11)(11a) Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.

(11b) Pour tout $n \geq 1$, donner l'ensemble des valeurs prises par X_n, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \,:\, P(X_n = x) > 0\}$.

(11c) Calculer l'espérance $E[X_2]$.

(12)(12a) Calculer la probabilité $P(X_3 = 3)$.

(12b) Calculer la probabilité conditionnelle $P(X_2 = 2 \mid X_3 = 2)$.

Pour $1 \leq k \leq M$, on note T_k le premier instant où l'ensemble $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ contient k éléments :

$$T_k = \min\{n \geq 1 \,:\, X_n = k\}\,.$$

(13)(13a) Donner sans justification la loi de T_1.

(13b) Donner sans justification la loi de $T_2 - T_1$.

(13c) Donner sans justification la loi de $T_3 - T_2$.

(13d) Calculer l'espérance $E[T_3]$.

Pour $i \geq 1$, on note $h_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j}$ et $v_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j^2}$.

(14)(14a) Montrer que

$$\text{pour } j \geq 1, \quad \int_j^{j+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{j} \qquad\qquad \text{et, pour } j \geq 2, \quad \frac{1}{j} \leq \int_{j-1}^{j} \frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

En déduire un encadrement de h_i pour $i \geq 2$.

(14b) Déterminer la limite de $(h_i)_{i\geq 1}$ lorsque $i \to +\infty$.

(14c) Justifier que la suite $(v_i)_{i\geq 1}$ converge vers une limite finie. *On ne demande pas d'expliciter la valeur de cette limite.*

On admet que les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots, T_M - T_{M-1}$ sont indépendantes.

(15)(15a) Pour $1 \leq k \leq M - 1$, donner sans justification la loi de $T_{k+1} - T_k$.

(15b) Exprimer $E[T_M]$ en fonction d'un terme h_i pour un i bien choisi.

(15c) Exprimer $V[T_M]$ en fonction de termes h_i et v_i pour un i bien choisi.

(15d) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que $P\left(\left|\dfrac{T_M}{M h_M} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{V(T_M)}{\varepsilon^2 M^2 h_M^2}$.

(15e) En déduire la limite de la probabilité précédente lorsque $M \to +\infty$.

PROBLÈME C.

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\,e^{-x} \end{array}.$$

(16)(16a) Déterminer les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$.

(16b) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

(16c) Dresser le tableau de variation de f.

(17)(17a) Trouver les points d'inflexion de f.

(17b) Tracer le graphe de f, en faisant apparaitre $f'(0)$.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on considère maintenant la fonction

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n\,e^{-x} \end{array}.$$

(18)(18a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(x)\,\mathrm{d}x$.

(18b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

(18c) Pour $n \geq 1$, exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x$.

(18d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(19) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, donner un développement limité en 0 à l'ordre $n+3$ de f_n.

On considère une variable aléatoire X de densité f_1.

(20)(20a) Calculer le moment d'ordre n de X.

(20b) Pour $t \in \mathbf{R}_+$, calculer la probabilité $P(X > t)$.

(20c) Pour s et $t \in \mathbf{R}_+$, calculer la probabilité conditionnelle $P(X > t+s \mid X > t)$.

On introduit la fonction

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbf{R}\times\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y\,e^{-|x|} \end{array}.$$

(21)(21a) Calculer les dérivées partielles de g aux points où elles sont définies.

(21b) À x fixé, tracer le graphe de la fonction $y \mapsto g(x,y)$.

(21c) Trouver les extremums locaux de g.

(21d) Donner les équations des lignes de niveau de g.

(21e) Tracer la ligne de niveau $\frac{1}{2}$ de g.

On fixe un réel $u_0 \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = g\left(\dfrac{u_{n-1}}{n}, n\right)$.

Tournez la page S.V.P.

(22)(22a) Donner, pour tout $n \geq 1$, un encadrement de u_n.

(22b) Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ lorsque $n \to \infty$.

On fixe un réel $w_0 \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \geq 1$, on pose $w_n = g\big(w_{n-1}, n\big)$.

(23)(23a) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet pas de limite finie.

(23b) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $(n+1)\, e^{-n\, e^{-1}} \leq 1$.

On suppose qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $w_{n_1} \leq 1$.

(23c) Quelle est la limite de $(w_{n_1+2n})_{n\in\mathbf{N}}$ lorsque $n \to \infty$?

(23d) Quelle est la limite de $(w_{n_1+1+2n})_{n\in\mathbf{N}}$ lorsque $n \to \infty$?