



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2011

Concepteur : ESSEC

OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

Filière B/L

MATHÉMATIQUES

Mardi 10 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Dans tout ce problème, on note, pour n entier naturel non nul : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1/5}}$.

Partie I - Résultats préliminaires

1) Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/5}}$ est divergente.

Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$?

- 2) Soit α un réel strictement positif. Déterminer un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $(n+1)^\alpha - n^\alpha$.
- 3) En déduire des valeurs de α et β réels tels que :

$$\frac{1}{n^{1/5}} \underset{+\infty}{\sim} \beta ((n+1)^\alpha - n^\alpha)$$

Partie II - Un équivalent de S_n

Dans cette partie, on désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites à valeurs réelles strictement positives équivalentes en $+\infty$.

On suppose que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente.

- 4) Que peut-on dire de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$? $\times$

Dans la suite de cette partie, ε désigne un réel strictement positif.

- 5) Justifier qu'il existe N entier avec $N \geq 1$ tel que si $k \geq N$, $(1 - \varepsilon)u_k \leq v_k \leq (1 + \varepsilon)u_k$.

- 6) En déduire que si $n \geq N$, $(1 - \varepsilon) \sum_{k=N}^n u_k \leq \sum_{k=N}^n v_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=N}^n u_k$. $\times$

- 7) Montrer que $\sum_{k=N}^n u_k$ est équivalent à $\sum_{k=N}^n v_k$ lorsque n tend vers $+\infty$. $\times$

- 8) En déduire que $\sum_{k=1}^n u_k$ est équivalent à $\sum_{k=1}^n v_k$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- 9) Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie III - Une partie entière

- 10) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer :

$$\forall x \in [0, 1], \quad (1+x)^{4/5} - 1 \leq \frac{4}{5}x$$

- 11) Montrer :

$$\forall t \in [0, 1], \quad (1+t)^{-1/5} - 1 \geq -\frac{1}{5}t$$

- 12) Par intégration, en déduire :

$\times$

$$\forall x \in [0, 1], \quad (1+x)^{4/5} - 1 \geq \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}x^2$$

- 13) Ainsi, pour $0 \leq x \leq 1$, $\frac{4}{5}x - \frac{2}{25}x^2 \leq (1+x)^{4/5} - 1 \leq \frac{4}{5}x$.

En déduire :

$\times$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{5}{4}((k+1)^{4/5} - k^{4/5}) \leq \frac{1}{k^{1/5}} \leq \frac{5}{4}((k+1)^{4/5} - k^{4/5}) + \frac{1}{10k^{6/5}}$$

- 14) En utilisant une intégrale, montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{6/5}} \leq 5$$

- 15) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{5}{4}((n+1)^{4/5} - 1) \leq S_n \leq \frac{5}{4}((n+1)^{4/5} - 1) + \frac{3}{5}$$

- 16) Retrouver le résultat de la question 9) et déterminer la partie entière de S_{95-1} .

PROBLÈME 2

Définitions et notations :

Dans ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels.

Pour a et b réels, on note $M_{a,b}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux valent a et les autres coefficients valent b .

On note en particulier $I = M_{1,0}$ et $J = M_{1,1}$.

Ce problème est constitué de trois parties indépendantes si on admet les résultats de la partie I.

Partie I - Étude de $M_{a,b}$

- 17) Justifier que le rang de J est 1 et donner une matrice colonne E_1 telle que (E_1) soit une base de l'image de J .
- 18) Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(J) \oplus \text{Im}(J)$ (c'est-à-dire que $\text{Ker}(J)$ et $\text{Im}(J)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
- 19) En déduire que J est diagonalisable et donner une base $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de J .
- ✕ 20) Pour a et b réels, exprimer $M_{a,b}$ à l'aide de a , b , I et J .
- 21) Justifier que les valeurs propres de $M_{a,b}$ sont exactement :
 $\lambda = a - b$ et $\mu = a + (n - 1)b$. La matrice $M_{a,b}$ est-elle diagonalisable ?

Dans toute la suite de ce problème, X et Y désignent deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même univers Ω et suivant la même loi. On suppose de plus que X et Y possèdent une espérance et une variance, et on notera $E = E(X) = E(Y)$ l'espérance commune à X et Y ainsi que $V = V(X) = V(Y)$ la variance commune à X et Y .

On note $M_{X,Y}$ l'application de Ω dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad M_{X,Y}(\omega) = M_{X(\omega),Y(\omega)}$$

Pour $\omega \in \Omega$, on note $\lambda(\omega) = X(\omega) - Y(\omega)$ et $\mu(\omega) = X(\omega) + (n - 1)Y(\omega)$ les valeurs propres de $M_{X(\omega),Y(\omega)}$.

Les probabilités qui interviennent dans la suite, en particulier celles utilisant $M_{X,Y}$, ne font intervenir que les lois de X et de Y .

Partie II - Probabilités associées à $M_{X,Y}$

- 22) Justifier que les fonctions λ et μ définies sur Ω par $\omega \mapsto \lambda(\omega)$ et $\omega \mapsto \mu(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles.
- 23) Dans cette question, X et Y suivent une loi géométrique de paramètre p dans $]0, 1[$. En utilisant les valeurs propres de $M_{X,Y}(\omega)$, déterminer la probabilité que $M_{X,Y}$ soit inversible.
- ✕ 24) Calculer la covariance de (λ, μ) en fonction de la variance V de X .
Justifier que si $n > 2$, les variables aléatoires λ et μ ne sont pas en général indépendantes.

Partie III - Une loi commune

On pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants :

- une fonction de la variable réelle à valeurs complexes se dérive ou s'intègre formellement comme une fonction à valeurs réelles ; les théorèmes usuels de l'analyse utilisés dans ce problème sont encore valables pour une fonction à valeurs complexes.

Par exemple, si x est un réel, on note $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ et la dérivée de e^{ix} est $ie^{ix} = i\cos(x) - \sin(x)$.

- si U est une variable à densité admettant une espérance et une variance et si φ est la densité de U supposée continue ici, on appelle fonction caractéristique de U la fonction f_U définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_U(x) = E(e^{ixU}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu} \varphi(u) du$$

(avec $i \in \mathbb{C}$ vérifiant $i^2 = -1$).

Cette fonction est deux fois dérivable à dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées sont obtenues en dérivant sous le signe intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} iue^{ixu} \varphi(u) du = i \int_{-\infty}^{+\infty} ue^{ixu} \varphi(u) du \quad f''_U(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{ixu} \varphi(u) du$$

- Si $x \in \mathbb{R}$, le conjugué de $f_U(x)$ est $\overline{f_U(x)} = E(e^{-ixU}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \varphi(u) du$.
- si deux lois U et V sont indépendantes, et si a et b sont deux réels, $f_{aU+bV} = f_{aU} f_{bV}$
- deux variables aléatoires réelles ayant la même fonction caractéristique, suivent la même loi.

- ✕ 25) Dans cette question, U désigne une variable à densité admettant une espérance et une variance. Que vaut $f_U(0)$? Exprimer l'espérance et la variance de U à l'aide de f'_U et de f''_U .

- 26) Dans cette question U suit une loi normale centrée d'écart-type σ .

- ⌚ (a) Rappeler la densité de U .

- (b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour x réel, $f'_U(x) = -x\sigma^2 f_U(x)$.

- (c) Déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto f_U(x) \cdot \exp(\frac{x^2\sigma^2}{2})$ et en déduire f_U .

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que X suit une loi à densité continue sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe α réel positif tel que X et $\alpha\lambda = \alpha(X - Y)$ ont même loi. On suppose de plus que la variance V de X est non nulle. On se propose de trouver la loi de X .

- ✕ 27) En calculant l'espérance de $\alpha\lambda$, montrer que l'espérance E de X est nulle.

- ✕ 28) En utilisant une variance, montrer que $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

- 29) Montrer que pour tout x réel, $f_X(x) = f_X(\frac{x}{\sqrt{2}}) \cdot \overline{f_X(\frac{x}{\sqrt{2}})} = \left| f_X(\frac{x}{\sqrt{2}}) \right|^2$.

Ainsi, f_X est à valeurs réelles positives.

- 30) On suppose qu'il existe x réel tel que $f_X(x) = 0$.

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_X\left(\frac{x}{(\sqrt{2})^n}\right) = 0$ et, par un passage à la limite, aboutir à une contradiction.

Ainsi, f_X ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

- ✓ 31) Justifier que la fonction $g = \ln \circ f_X$ est définie deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à dérivée seconde continue.

- 32) En utilisant la question 29), montrer que pour x réel, $g''(x) = g''(\frac{x}{\sqrt{2}})$ et en déduire que g'' est constante sur $\mathbb{R}$.

- ✓ 33) En déduire que $f_X(x)$ est de la forme $\exp(ax^2)$ où a est une constante réelle.

- 34) Déterminer la loi suivie par la variable X .