BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 339

Conception : ESSEC

FILIERE LITTERAIRE

Programme ENS B/L

Mardi 6 mai 2014, de 8 h. à 12 h.

<u>OPTIONS</u> :

- **MATHEMATIQUES**
- **SCIENCES SOCIALES**

Concours d'admission de 2014

Conception : ESSEC

OPTION Lettres et Sciences Humaines

MATHÉMATIQUES option ENS B/L

Mardi 6 mai 2014, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La matrice unité carrée d'ordre n est notée I_n.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note u_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A (de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$).
Le noyau (resp. l'image) d'une matrice A désigne en fait le noyau (resp. l'image) de u_A.

Si p (ou $p(X)$) est un polynôme de la forme $\sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ et A une matrice carrée d'ordre n, on posera $p(A) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k$. Par exemple, si $p = 2X^2 - X + 2$, $p(A) = 2A^2 - A + 2I_n$.

Dans ce problème, on se propose de faire le lien entre le caractère diagonalisable d'une matrice carrée A d'ordre n et l'existence d'un polynôme p unitaire scindé à racines simples, c'est-à-dire de la forme $\prod\limits_{k=1}^{d}(X - \lambda_k)$ avec les λ_k distincts deux à deux dans $\mathbb{K}$, tel que $p(A) = 0$.

Partie I - Un cas particulier

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on suppose qu'il existe λ et μ distincts dans $\mathbb{K}$ tels que $(A-\mu I_n)\times(A-\lambda I_n)=0$. On pose :
$E_\lambda=\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n)=\{x\in\mathbb{K}^n;\ u_A(x)=\lambda x\}$ et $E_\mu=\operatorname{Ker}(A-\mu I_n)=\{x\in\mathbb{K}^n;\ u_A(x)=\mu x\}$.

1) Montrer que $\operatorname{Im}(A-\lambda I_n)\subset E_\mu$.

2) Montrer que $\mathbb{K}^n\subset\operatorname{Im}(A-\lambda I_n)+\operatorname{Im}(A-\mu I_n)$ (on pourra utiliser $(A-\lambda I_n)-(A-\mu I_n)$).

3) En déduire que A est diagonalisable.

4) *Exemple :* soit A la matrice carrée d'ordre n dont le terme situé sur la ligne i et la colonne j est $A_{i,j}=j$ (donc indépendant de i).
En calculant A^2, montrer que A est diagonalisable et déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base de vecteurs propres de A.

Partie II - Cas général

II.A - Une première implication

Dans cette section, A est une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on suppose qu'il existe un polynôme p unitaire, de degré $d\in\{1,\dots,n\}$, scindé à racines simples tel que $p(A)=0$.

On pose $p=\prod_{k=1}^{d}(X-\lambda_k)$ et $\lambda_k\in\mathbb{K}$ $(1\le k\le d)$ distincts deux à deux.

On définit une matrice de Vandermonde de la façon suivante :

$$V(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_d)=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\cdots&\lambda_d\\ \lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2&\cdots&\lambda_d^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ \lambda_1^{d-1}&\lambda_2^{d-1}&\lambda_3^{d-1}&\cdots&\lambda_d^{d-1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$$

5) Soit $M\in\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$. Montrer que $M\in GL_d(\mathbb{K})\iff {}^tM\in GL_d(\mathbb{K})$ ($GL_d(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ inversibles).

6) Déterminer le noyau de de ${}^tV(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_d)$.

7) En déduire que $V(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_d)$ est inversible.

On note $E_k=\operatorname{Ker}(A-\lambda_k I_n)$ $(1\le k\le d)$. On rappelle que les scalaires λ_k sont distincts deux à deux.

8) Soit $x\in\mathbb{K}^n$. Montrer que le système d'inconnue $(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{K}^n$:

$$(1)\qquad \left\{\sum_{k=1}^{d}\lambda_k^i x_k=u_A^i(x)\quad(0\le i\le d-1)\right.$$

possède une solution et que cette solution est dans $E_1\times\cdots\times E_d$.

9) En déduire que $\mathbb{K}^n=\bigoplus_{k=1}^{d}E_k$.

10) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de u_A est diagonale.

II.B - Une deuxième implication

Dans cette section, A désigne toujours une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on suppose maintenant qu'il existe une base $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $u_A(e'_k)$ soit de la forme $\lambda_k e'_k$ ($1 \leq k \leq n$, $\lambda_k \in \mathbb{K}$).
On notera P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ vers la base $\mathscr{B}'$.

11) Quelle est la forme de la matrice D de u_A dans la base $\mathscr{B}'$?

12) Déterminer, pour p polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, $p(A)$ en fonction de P et des nombres $p(\lambda_k)$ ($1 \leq k \leq d$).

13) Montrer qu'il existe p polynôme scindé unitaire à racines simples tel que $p(A) = 0$.

14) Que peut-on conclure ?

15) *Exemple :* Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n,\ u(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n, x_1)$$

Montrer que u est diagonalisable.

PROBLÈME 2

On désigne par $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Les variables aléatoires utilisées dans ce problème sont toutes définies sur $\mathscr{E}$ et à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

Partie I - Une étude de séries

Dans cette partie, x désigne un réel de $]-1, 1[$, n et k des entiers avec $0 \leq k \leq n$. On pose :

$$u_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
On va montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n \geq k} u_{n,k}(x)$ et calculer sa somme.

À cet effet, on pose, pour N entier avec $N \geq k$, $S_{N,k}(x) = \sum\limits_{n=k}^{N} u_{n,k}(x)$.

16) Rappeler pour quelles valeurs de x la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_{n,0}(x) = \sum\limits_{n \geq 0} x^n$ converge et donner la somme de cette série.

17) Montrer, pour tous k et N entiers avec $N \geq k \geq 1$, que :

$$(1-x) S_{N,k}(x) = S_{N-1,k-1}(x) - \binom{N}{k} x^{N+1-k}$$

18) Montrer par récurrence sur k que la série $\sum\limits_{n \geq k} u_{n,k}(x)$ converge pour $k \in \mathbb{N}$ et que :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} u_{n,k}(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

19) *Application :* Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle, suivant une loi géométrique de paramètre p (on rappelle qu'une telle loi prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$).

Partie II - Construction d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire ; on rappelle que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on pose $p(A)$ la probabilité $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in A\})$ et on suppose que $0 < p(A) < 1$. On définit alors la fonction $1_A(X)$ sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad 1_A(X)(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \in A \\ 0 & \text{si } X(\omega) \notin A \end{cases}$$

On admettra que $1_A(X)$ définit bien une variable aléatoire sur $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

20) Quelle est la loi suivie par $1_A(X)$? On précisera se(s) paramètre(s) à l'aide de $p(A)$.

21) Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $\mathscr{E}$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, suivant une même loi et indépendantes.
Pour A partie de $\mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$, on pose toujours $p(A)$ la probabilité $\mathbb{P}(X_k \in A)$ (indépendante de k) et on suppose toujours que $0 < p(A) < 1$.
On considère la variable aléatoire $S_A = \sum\limits_{k=1}^{n} 1_A(X_k)$ (notations du début de la partie).
Quelle est la loi suivie par S_A ? On précisera le(s) paramètre(s) de cette loi à l'aide de $p(A)$.

22) Pouvez vous expliquer simplement ce que représente S_A ?

Partie III - Caractérisation des lois de Poisson

Dans cette partie, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur $\mathscr{E}$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, suivant une même loi et indépendantes.
Pour A partie de $\mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$, on pose toujours $p(A)$ la probabilité $\mathbb{P}(X_k \in A)$ (indépendante de k) et on suppose toujours que $0 < p(A) < 1$.
On notera $\overline{A}$ la partie complémentaire de A dans $\mathbb{N}$; ainsi, pour n dans $\mathbb{N}$, $n \in \overline{A} \iff n \notin A$.
On considère par ailleurs une variable aléatoire N définie sur $\mathscr{E}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des lois $X_k (k \in \mathbb{N}^*)$. On notera $p_n = \mathbb{P}(N = n)$ si $n \in \mathbb{N}$.
On définit la fonction T_A (dont on admettra qu'elle définit bien une variable aléatoire sur $\mathscr{E}$) par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T_A(\omega) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N(\omega)} 1_A(X_k)(\omega) & \text{si } N(\omega) \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

23) Soit $k \in \mathbb{N}$; en distinguant les cas $k = 0$ et $k \geq 1$, montrer que :

$$\mathbb{P}(T_A = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} p_n \binom{n}{k} p(A)^k (1 - p(A))^{n-k}$$

on justifiera la convergence de la série écrite.

24) Montrer que $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(T_A = k, T_{\overline{A}} = l) = p_{k+l} \binom{k+l}{k} p(A)^k (1 - p(A))^l$.

25) Dans cette question, la variable N suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Montrer que T_A et $T_{\overline{A}}$ sont indépendantes et déterminer la loi de T_A.

26) On revient au cas général ; on suppose que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires T_A et $T_{\overline{A}}$ sont indépendantes. Montrer que la variable N suit une loi de Poisson, dont on déterminera le paramètre.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC

FILIERE LITTERAIRE

Programme ENS B/L

SCIENCES SOCIALES

Mardi 6 mai 2014, de 8 h. à 12 h.

Faut-il avoir un objectif de qualité de l'emploi ?

N.B. : Il n'est fait usage d'aucun document et l'utilisation de tout matériel électronique n'est pas autorisée.

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1263 – D'après documents fournis