

Conception : ESSEC

OPTION Lettres et Sciences Humaines

MATHÉMATIQUES option ENS B/L

Mardi 3 mai 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

On désigne par f la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

La partie II est indépendante de la partie I si on admet les résultats qui y sont montrés.

Partie I - Étude de f

- 1) Déterminer l'unique réel x de $]0, 1[$ tel que $f(x) = 0$.
- 2) Donner un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 à droite pour la fonction f .
- 3) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que la fonction prolongée obtenue est dérivable en 0. On donnera l'équation de la tangente en 0.
- 4) Justifier que f est dérivable sur $]0, 1[$ et exprimer $f'(x)$, pour x dans $]0, 1[$, en fonction de $y = \frac{1}{\ln(x)}$ seulement.
- 5) En déduire l'existence et l'unicité d'un réel x_0 de $]0, 1[$ que l'on précisera tel que $f'(x_0) = 0$.
- 6) Dresser le tableau des variations de f sur $]0, 1[$.
- 7) Justifier que pour tout x de $]0, 1[$, $f(x) \leq x$.

Partie II - Étude d'une suite récurrente

Jusqu'à la fin de ce problème, on désigne par u ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où e désigne $\exp(1)$

On admettra le résultat suivant :

si v et w sont deux suites réelles positives vérifiant $v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ et si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge, alors :

$$\sum_{k=0}^n v_k \sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n w_k$$

II.A - Résultat préliminaire

Dans cette section, α désigne un réel de $]0, 1[$.

- 8) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ avec $n \geq 2$:

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

- 9) En déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$ sous la forme an^b avec a et b réels à déterminer.

II.B - Étude de la suite u

- 10) Montrer par récurrence la propriété « u_n est bien défini et appartient à $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ ».
- 11) Étudier les variations de la suite u et en déduire que cette suite converge.
- 12) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).

II.C - Convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$

13) Si $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle, rappeler un équivalent de $(1 + \varepsilon_n)^2 - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

14) Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $\ln^2(u_{n+1}) - \ln^2(u_n)$ est équivalent à une constante strictement positive β que l'on déterminera.

15) En déduire, en utilisant le résultat encadré admis, que $\ln^2(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \beta n$.

16) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 u_n) = 0$ et en déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

II.D - Recherche d'un équivalent de u_n

Dans le reste de ce problème, on pose $v_n = \ln^2(u_n) - 2n$.

17) Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 pour la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et trouver un équivalent de $v_{n+1} - v_n$ lorsque n tend vers $+\infty$ sous la forme $\frac{A}{n^\gamma}$ avec A et γ réels à déterminer.

18) En déduire un développement de $\ln(u_n)$, lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme :

$$\ln(u_n) = a\sqrt{n} + b + o(1)$$

où a et b sont des réels à déterminer.

19) En déduire un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

PROBLÈME 2

Dans ce problème N est un entier naturel supérieur ou égal à deux. Toutes les matrices considérées dans ce problème sont à coefficients réels.

Si A est une matrice carrée, le terme situé sur la ligne i et la colonne j de A sera noté $A_{i,j}$.

Si C est une matrice colonne, son terme situé sur la ligne i sera noté C_i .

Si L est une matrice ligne, son terme situé sur la colonne j sera noté L_j .

La partie II est indépendante de la partie I si on admet les résultats qui y sont montrés.

Partie I - Une norme matricielle

Dans cette partie toutes les matrices considérées sont carrées d'ordre $N-1$.

Si A est une matrice, on pose $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq N-1} \sum_{j=1}^{N-1} |A_{i,j}|$.

20) Montrer les résultats suivants :

(a) Pour toutes matrices A et B , $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(b) Pour toute matrice A et tout λ réel, $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$.

(c) Pour toute matrice A , $\|A\| = 0 \iff A = 0$.

21) Si A et B sont des matrices, majorer $\|AB\|$ à l'aide de $\|A\|$ et de $\|B\|$.

22) En déduire que pour toute matrice A , et tout entier naturel n , $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices et soit A une matrice.

On dira que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers A si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - A\| = 0$ et on notera $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n)$.

23) Montrer qu'une suite de matrices carrées $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice carrée A si et seulement si, chaque suite des coefficients de A_n converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers le coefficient correspondant de A .

Le reste de cette partie consiste à étudier un exemple fondamental. On notera I la matrice unité (dont les termes diagonaux valent 1 et dont les autres coefficients sont nuls).

Soit A une matrice vérifiant $\|A\| < 1$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n A^k$.

24) Soit C une matrice colonne à $N - 1$ lignes telle que $AC = C$; en considérant C_i où i est un entier de $\llbracket 1, N - 1 \rrbracket$ tel que $|C_i| = \max_{1 \leq k \leq N-1} |C_k|$, montrer que C est nulle. Que peut-on en déduire concernant l'inversibilité de la matrice $I - A$?

25) Justifier que $(I - A)S_n = I - A^{n+1}$.

26) Montrer que la suite de matrices $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle et en déduire que la suite de matrices $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est $(I - A)^{-1}$.

Partie II - Évolution probabiliste d'une maladie

Dans cette fin de problème, on étudie l'évolution d'une maladie au sein d'une population de N individus au cours des semaines supposées indexées par $\mathbb{N}$ à partir de la semaine 0.

On fera les hypothèses suivantes :

- il existe un espace probabilisé $\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre d'individus malades la n -ème semaine définit une variable aléatoire sur $\mathcal{E}$ notée X_n pour laquelle $X_n(\Omega) \subset \llbracket 0, N \rrbracket$
- le nombre de malades, une semaine donnée, ne dépend que du nombre de malades la semaine précédente. Plus formellement, pour tout n de $\mathbb{N}$, pour tous $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ de $\llbracket 0, N \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n)$$

- il existe p réel dans $]0, 1[$ que l'on peut qualifier de «facteur de résistance» tel que pour une personne saine, au contact de i malades avec $i \in \mathbb{N}$, la probabilité de rester sain est p^i .
- un individu atteint de la maladie à la n -ème semaine, n'est plus malade à la $(n + 1)$ -ème semaine.
- des personnes saines tombent malades ou restent saines de façon indépendante.

La matrice ligne à $N + 1$ colonnes $(\mathbb{P}(X_n = 0) \quad \mathbb{P}(X_n = 1) \quad \dots \quad \mathbb{P}(X_n = N))$ sera notée $L^{(n)}$.

27) Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, pour tous i et j de $\llbracket 0, N \rrbracket$ (en supposant $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$) :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j / X_n = i) = \begin{cases} \binom{N-i}{j} (1-p)^j p^{i(N-i-j)} & \text{si } i+j \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans la suite, on notera P la matrice carrée d'ordre $N + 1$ dont le terme situé sur la ligne $i + 1$ et la colonne $j + 1$ est $P_{i+1,j+1} = \begin{cases} \binom{N-i}{j} (1-p)^j p^{i(N-i-j)} & \text{si } i+j \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

28) Que valent alors l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_i avec $Y_i(\Omega) \subset \mathbb{N}$ définie par $\mathbb{P}(Y_i = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k / X_n = i)$ pour $0 \leq k \leq N - i$ (avec i fixé) ?

29) Montrer que la matrice P est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \hline C & Q & \vdots \\ \hline 1 & 0 \dots 0 & 0 \end{array} \right)$$

où C est une matrice colonne à $N - 1$ lignes que l'on déterminera et Q est la matrice carrée d'ordre $N - 1$ dont le terme situé sur la ligne i et la colonne j est $P_{i+1,j+1}$.

30) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $L^{(n+1)} = L^{(n)}P$ et en déduire $L^{(n)}$ en fonction de P , n et $L^{(0)}$.

31) Exemple : $N = 2$

pour $N = 2$, montrer que pour $n \geq 1$, P^n est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_n & y_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $x_n + y_n = 1$ et en déduire la loi de X_n en fonction de a, b, c et n où l'on a noté $L^{(0)} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

Partie III - Temps d'éradication de la maladie

Dans cette partie, on suppose que pour i entier dans $\llbracket 0, N \rrbracket$, on a $\mathbb{P}(X_0 = i) > 0$. On rappelle que l'on définit une probabilité $\mathbb{P}_i$ sur $\mathcal{E}$ par :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}(A/X_0 = i)$$

Toutes les probabilités utilisées par la suite sont relatives à $\mathbb{P}_i$.

On note $T = \min\{n \in \mathbb{N}; X_n = 0\}$ et on admet que T définie une variable aléatoire sur $\mathcal{E}$, représentant le temps d'éradication de la maladie. On se propose de montrer que $\mathbb{P}_i(F) = 1$ où F correspond à l'événement « T est fini» (autrement dit, on va montrer que T est $\mathbb{P}_i$ -presque sûrement fini).

32) Dans cette question, $i = 0$; justifier que $\mathbb{P}_i(T = 0) = 1$.

33) Dans cette question, $i = N$; quelle est la loi de T (relativement à $\mathbb{P}_i$) ?

Dans la suite de ce problème, pour n dans $\mathbb{N}$, on note $C^{(n)}$ la matrice colonne à $N - 1$ lignes dont le terme situé sur la ligne i , pour $1 \leq i \leq N - 1$, est $\mathbb{P}_i(T = n)$.

34) Soit n entier supérieur à deux. Montrer que pour $1 \leq i \leq N - 1$:

$$\mathbb{P}(T = n/X_0 = i) = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{P}(T = n/X_1 = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_1 = k/X_0 = i)$$

35) En déduire que pour n entier supérieur à 1, $C^{(n)} = QC^{(n-1)}$ (où Q est définie dans la partie précédente).

36) Montrer que $\|Q\| < 1$.

37) Montrer que $(I - Q)U = C$ où U est la matrice colonne à $N - 1$ lignes constituées de 1 et où C est définie dans la partie précédente.

38) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_i(T = n)$ converge, calculer sa somme et en déduire que T est $\mathbb{P}_i$ -presque sûrement fini pour tout i de $\llbracket 1, N - 1 \rrbracket$.