

Conception : ESSEC BS

Filière Littéraire

Programme ENS B/L

Lundi 7 mai 2018, de 14 h. à 18 h.

OPTIONS :

Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets :

- MATHÉMATIQUES

- SCIENCES SOCIALES

Conception : ESSEC BS

MATHÉMATIQUES

Programme ENS B/L

Lundi 7 mai 2018, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE

Dans cet exercice :

- On note E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- On désigne par v un endomorphisme de E diagonalisable sur E possédant au plus deux valeurs propres λ et μ dans $\mathbb{K}$.

On notera E_λ (resp. E_μ) l'espace propre de v associé à la valeur propre λ (resp. μ).

On posera $p = \dim(E_\lambda)$ et $q = \dim(E_\mu)$.

On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{E}$ des endomorphismes u de E vérifiant :

$$u = v \circ u + u \circ v$$

- 1) Montrer que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

2) Déterminer $\mathcal{E}$ lorsque $\lambda = \mu$. (On distinguera les cas $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda \neq \frac{1}{2}$).

Dans toute la suite de cet exercice, on suppose que $\lambda \neq \mu$.

A - Un premier cas particulier

Dans cette section, on suppose que $\mu \neq 1 - \lambda$. Soit $u \in \mathcal{E}$.

3) Montrer que tout vecteur propre de v est dans $\text{Ker}(u)$.

4) En déduire que $\mathcal{E} = \{0\}$.

B - Un second cas particulier

Dans cette section, on suppose que $\lambda + \mu = 1$ et $\lambda \neq \mu$. Soit $u \in \mathcal{E}$.

5) Montrer que $u(E_\mu) \subset E_\lambda$ et $u(E_\lambda) \subset E_\mu$.

6) Montrer que réciproquement, si u est un endomorphisme de E qui vérifie $u(E_\mu) \subset E_\lambda$ et $u(E_\lambda) \subset E_\mu$, alors u est dans $\mathcal{E}$. (On pourra travailler matriciellement dans une base de E obtenue par concaténation de bases de E_λ et de E_μ).

7) Déterminer les endomorphismes u de E vérifiant $u \circ u = u$ et appartenant à $\mathcal{E}$.

8) Montrer que $\mathcal{E}$ contient des endomorphismes u vérifiant $u \circ u = \text{id}_E$ si et seulement si $p = q$.

9) Déterminer la dimension de $\mathcal{E}$ à l'aide de p et q .

PROBLÈME

On admettra le théorème de Cesaro suivant :

Théorème de Cesaro : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ avec $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ converge elle aussi vers ℓ .

Dans ce problème, on désigne par $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Toutes les variables aléatoires sont à valeurs réelles et définies sur Ω .

On rappelle que si X est une variable aléatoire et si x est un réel :

$(X = x)$ (resp. $(X \geq x)$) désigne l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ (resp. $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\}$).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une autre variable aléatoire. On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou tout simplement X_n) converge :

- **presque sûrement** vers X si :

il existe $A \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A) = 1$ tel que pour tout $\omega \in A$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$

- **complètement** vers X si :

pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ converge

On remarquera que dans ces deux définitions, quitte à remplacer X_n par $X_n - X$, on peut se ramener au cas où $X = 0$, ce qu'on supposera par la suite.

Le but du problème est d'étudier le lien entre la convergence presque sûre et la convergence complète de suites de variables aléatoires.

On démontrera dans la partie II, que la convergence complète entraîne la convergence presque sûre ce que l'on résume schématiquement par :

convergence complète $\implies$ convergence presque sûre

On pourra admettre cette implication pour traiter la partie I.

Partie I - Exemples et contre-exemples

A - Loi de Bernoulli

Dans cette section, on se donne une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $]0, 1[$ et, pour n dans $\mathbb{N}$, X_n désigne une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n .

Ainsi, $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) = p_n$.

On pose, pour n dans $\mathbb{N}$, $A_n = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0\}$ et $B = \bigcup_{n \geq 0} (\bigcap_{p \geq n} A_p)$.

10) Pour $\varepsilon > 0$, déterminer $\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon)$ et en déduire que X_n converge complètement vers 0 si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n$ converge.

11) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que $\omega \in B$ si et seulement si $X_n(\omega) = 0$ à partir d'un certain rang.

12) En déduire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend presque sûrement vers 0 si et seulement si $\mathbb{P}(B) = 1$.

B - Minimum de lois exponentielles

Dans cette section, on désigne par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, la variable X_n suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$.

Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $M_n = \min_{0 \leq p \leq n} X_p$.

13) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(|M_n| \geq \varepsilon) = \exp(-\varepsilon \sum_{k=0}^n \lambda_k)$.

14) Dans cette question, on suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \geq \lambda$.

Montrer que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge complètement vers 0.

15) Dans cette question, on suppose que $\lambda_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$ si $n \geq 1$ et $\lambda_0 = 0$.

Montrer que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas complètement vers 0.

C - La convergence presque sûre n'entraîne pas la convergence complète

Dans cette section, on désigne par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$:

$$X_n(\Omega) = \{0, n\} \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$$

16) Pour p entier naturel non nul, on pose $u_p = \prod_{j=p+1}^{2p} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right)$.

Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = 1$ (on pourra encadrer $\ln(u_p)$).

17) Justifier que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge complètement vers 0. Pour la suite de cette section, on remarquera que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 0 d'après un résultat admis.

18) On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $Y_n = \frac{S_n}{n}$ et Y_0 la variable aléatoire nulle.

Montrer que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 0.

Pour p et k entiers naturels non nuls, avec $p+1 \leq k \leq 2p$, on note A_k l'événement :

$$A_k = (X_k = k) \cap (X_{k+1} = 0) \cap (X_{k+2} = 0) \cap \dots \cap (X_{2p} = 0)$$

avec la convention $A_{2p} = (X_{2p} = 2p)$.

19) Donner $\mathbb{P}(A_{2p})$ et justifier que pour $p+1 \leq k \leq 2p-1$, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k^2} \prod_{j=k+1}^{2p} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right)$.

20) Montrer que $\bigcup_{k=p+1}^{2p} A_k$ est inclus dans l'événement $(Y_{2p} \geq \frac{1}{2})$.

21) En déduire que $\mathbb{P}(Y_{2p} \geq \frac{1}{2}) \geq \prod_{j=p+1}^{2p} \left(1 - \frac{1}{j^2}\right) \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k^2}$.

22) En déduire que pour p assez grand, $\mathbb{P}(|Y_{2p}| \geq \frac{1}{2}) \geq \frac{1}{8p}$ et conclure que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas complètement vers 0.

Partie II - Liens entre convergence presque sûre et convergence complète

Pour traiter cette partie, on admettra le lemme de Borel-Cantelli :

Lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $E = \bigcap_{p \geq 0} \left(\bigcup_{q \geq p} A_q \right)$.

- Si la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge alors $\mathbb{P}(E) = 0$.
- Si la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge et si les événements A_n sont indépendants alors $\mathbb{P}(E) = 1$.

Dans cette partie on considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

A - La convergence complète implique la convergence presque sûre

Dans cette section, on suppose que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge complètement vers 0.

23) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que l'on n'a pas $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ si et seulement si :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, q \geq p \text{ et } |u_q| \geq \frac{1}{n}$$

24) Si on note, pour n dans $\mathbb{N}^*$, E_n l'événement $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{q \geq p} (|X_q| \geq \frac{1}{n}) \right)$, montrer que l'ensemble

B des ω de Ω tels que la suite $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 est exactement $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$.

25) Justifier que B est un événement et que $\mathbb{P}(B) = 0$. Conclusion ?

B - La convergence presque sûre implique la convergence complète dans le cas d'indépendance

Dans cette section, on suppose que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée de variables indépendantes et converge presque sûrement vers 0.

Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on appelle A_n l'événement $(|X_n| \geq \varepsilon)$ et on suppose que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

26) Montrer que l'événement $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{q \geq p} A_q \right)$ est de probabilité 1.

27) En déduire qu'il existe deux événements disjoints de probabilité 1 et aboutir à une contradiction.

28) Conclusion ?

Conception : ESSEC BS

Filière Littéraire

Programme ENS/BL

SCIENCES SOCIALES

Lundi 7 mai 2018, de 14 h. à 18 h.

L'épargne, vice ou vertu ?

N.B. :

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout autre matériel électronique est interdite.

Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue.

