BCE 2020

EXERCICE 1

Toutes les variables aléatoires introduites dans cet exercice sont supposées définies sur une même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire G définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2)(1+t)} & \text{si} \qquad t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

   Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire de densité f

2. (a) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-\ln(2)}{\ln(2)}$.

   (b) En utilisant l'identité, valable pour tout z réel, $z^2 = z(1+z) - z$, calculer $\mathbb{V}(Z)$.

3. Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

   (a) Déterminer pour tout x réel, $F(x)$.

   (b) Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue x ; admet une unique solution x_0 que l'on déterminera.

   (c) Tracer la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on donne $\ln 2 \approx 0,7$).

4. Soit $x \in [0,2]$.

   (a) Etablir l'équivalence suivante : $f(t)f(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \max(0, x-1) \leqslant t \leqslant \min(1,x)$.

   (b) On note ϕ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\phi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+t)(1+x-y)} & \text{si} \qquad \max(0,x-1) \leqslant t \leqslant \min(1,x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On admet l'existence d'un unique couple (A, B) de réels indépendants de t pour lesquels on a :

   $$\forall t \in [\max(0,x-1), \min(1,x)], \frac{1}{(1+t)(1+x-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1+x-t}$$

   Montrer que $A = B = \dfrac{1}{x+2}$.

5. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X, de même loi que X et de densité f.

   On pose $Z = X + Y$, et on admet que Z est une variable aléatoire à densité.

   On note h une densité de la variable aléatoire Z et on admet que h est donnée par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)dt$$

   (a) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

(b) Montrer que :

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{2\ln(1+x)}{(\ln 2)^2(x+2)} & \text{si} \qquad 0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{2(\ln 2-\ln x)}{(\ln 2)^2(x+2)} & \text{si} \qquad 1<x\leqslant 2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels tous non nuls et on associe à cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, p_n=u_1\times u_2\times ...\times u_n=\prod_{k=1}^{n}u_k$$

— Si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie p *non nulle*, on dit que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *bien convergente*.
— Si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, on dit que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *convergente*.
— Si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est ni *convergente* ni *bien convergente*, on dit qu'elle est *divergente*.

1. Dans chacun des cas suivants, exprimer p_n en fonction de n et en déduire la nature (convergente, bien convergente ou divergente) de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=1+\dfrac{1}{n}$.
   (b) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=1-\dfrac{1}{n+1}$.
   (c) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$.
2. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$u_1=1 \quad \text{et} \quad \forall n\geqslant 2, u_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$$

   (a) Etablir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante : $p_{2n}=1+\dfrac{1}{2n}$.
   (b) Déterminer les limites respectives des suites $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(p_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   On admet alors que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *bien convergente*.
3. Soit a un réel donné tel que $0<a<1$. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=1+a^{2^n}$$

   On prendre garde au fait que a^{2^n} désigne la valeur de $a^{(2^n)}$ qui est distinct de $(a^2)^n=a^{2n}$.
   (a) Etablir la relation suivante :

$$\forall n\geqslant 1, (1-a^2)p_n=1-a^{2^{n+1}}$$

   (b) Montrer que pour tout entier $n\geqslant 1$, on a $a^{2^n}\leqslant a^n$.
   (c) En déduire la valeur de $p=\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$ en fonction de a.

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + a_n$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $T_n = \dfrac{a_n}{p_n}$.

   (a) Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 2$, T_n en fonction de p_n et p_{n-1}.

   (b) On suppose que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *bien convergente* de limite $p > 0$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} T_n = 1 - \frac{1}{p}$.

   (c) On suppose que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *divergente*.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} T_n = 1$.

PROBLEME

Dans ce problème, on désigne par n et p des entiers naturels tels que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$.
Toutes les matrices considérées ici sont à coefficients réels.
Soit A une matrice carrée $p \times p$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on note $a_{i,j}$ le coefficient situé à l'intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne de la matrice A.
On rappelle que la trace de A, notée $\mathrm{tr}(A)$, est définie par : $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{i,i}$.
Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sont des réels, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)$ la matrice $p \times p$ diagonale :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Dans la première partie, on exprime la trace de la puissance n^e d'une matrice diagonale, en fonction des valeurs propres de cette matrice.
Dans la seconde partie, on étude les colorations d'une figure.

PARTIE I - Expression de la trace de A^n si A diagonalisable

A- Etude d'un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que les valeurs propres de A sont -1 et 2.

2. (a) Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ constitue une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2 et que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ constituent une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1.

(b) En déduire que la matrice A est diagonalisable. On pose alors $D = \text{diag}(-1, -1, 2)$.

3. On note P la matrice 3×3 définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   On admet que $P^3 - 2P^2 + 3P - 3I = 0$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (on ne demande pas de vérifier cette relation).

   (a) Calculer la matrice P^{-1}, inverse de la matrice P.

   (b) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

   (c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

   (d) Vérifier, que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\text{tr}(A^n) = \text{tr}(D^n) = 2(-1)^n + 2^n$.

B- Cas général

Dans cette section, A désigne une matrice $p \times p$ supposée diagonalisable.

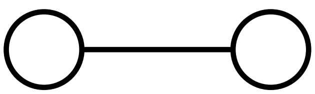
4. *Question préliminaire :*
   Montrer que si U et V sont deux matrices $p \times p$, alors $\text{tr}(UV) = \text{tr}(VU)$.
   On rappelle que A est diagonalisable et donc qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p)$ avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_p$ et une matrice $p \times p$ inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

5. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$:

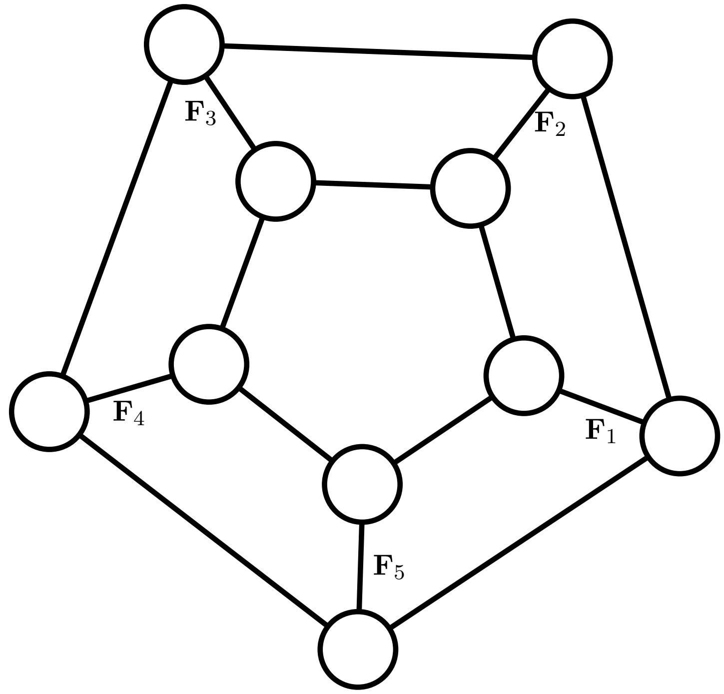
$$\text{tr}(A^n) = \text{tr}(D^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n + ... + \lambda_p^n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n$$

Partie II - Une figure colorée

Dans la suite de ce problème, on étudie les colorations d'une figure notée $\mathcal{F}_n$ pour $n \geqslant 1$.
La figure $\mathcal{F}_1$ ou plus simplement F est constituée de deux points ou sommets reliés entre eux.
Plus généralement, la figure $\mathcal{F}_n$ est constituée de n copies de la figure F notées $F_1, F_2, ..., F_n$ reliées entre elles et disposées de sorte qu'elles forment deux polygones à n sommets.
La FIGURE 1 ci-dessous représente les figures F et $\mathcal{F}_5 = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$



(a)la figure $\mathcal{F}_1 = F$



(b) la figure $\mathcal{F}_5$

FIGURE 1 – deux figures $\mathcal{F}_n$ ($n = 1$ et $n = 5$)

On dispose par ailleurs de trois couleurs, à savoir : Blanc, notée B, Gris notée G et noir notée N.
Chaque sommet de $\mathcal{F}_n$ est coloré par une couleur choisie parmi B, G, N.
La coloration de la figure $\mathcal{F}_n$ sera dite **correcte** si deux sommets reliés dans la figure sont de couleurs différentes.
La FIGURE 2 ci-dessous représente une coloration correcte de $\mathcal{F}_4 = (F_1, F_2, F_3, F_4)$.

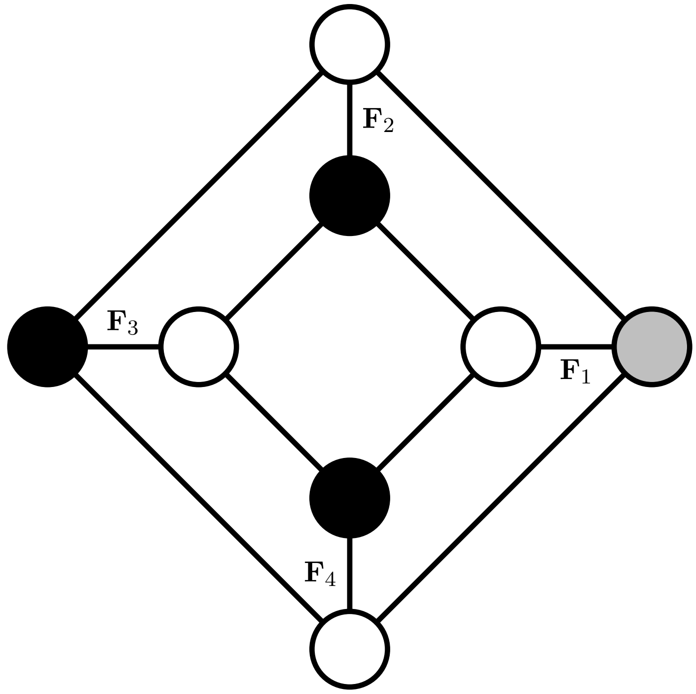


Figure 2 – une coloration correcte de $\mathcal{F}_4$

Par exemple, les colorations correctes de F sont :

$$(B, G),\ (B, N),\ (G, N),\ (G, B),\ (N, B) \text{ et } (N, G).$$

On notera que les colorations (B, G) et (G, B) (par exemple) sont différentes ; ceci signifie que dans une coloration de la figure $\mathcal{F}_n$, les sommets sont supposés distingués les uns des autres.
Dans la suite de ce problème, on se donne une partie non vide $C = \{c_1, c_2, ..., c_p\}$ avec $2 \leqslant p \leqslant 6$, de l'ensemble $(B, G), (B, N), (G, N), (G, B), (N, B), (N, G)$, des colorations correctes de F.
Pour obtenir une coloration correcte de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, F_2, ..., F_n)$, on commence par choisir des colorations correctes de chacune des copies F_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dans l'ensemble C.
On dit que deux éléments $c = (K_1, K_2)$ et $c' = (K'_1, K'_2)$ de C sont **compatibles** si $K_1 \neq K'_1$ et $K_2 \neq K'_2$.
Par exemple, $c = (B, N)$ et $c' = (N, G)$ sont compatibles car $B \neq N$ et $N \neq G$; par contre, $c = (B, N)$ et $c' = (B, G)$ ne sont pas compatibles (même première composante B).
Il en résulte que la coloration de la figure $\mathcal{F} = (F_1, F_2, ..., F_n)$ sera correcte si les colorations F_1 et F_2, F_2 et F_3 ,..., F_{n-1} et F_n et aussi F_n et F_1 sont compatibles.

A- Probabilités

Dans cette section, on suppose $n \geqslant 2$ et on admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que Ω est l'ensemble des figures $\mathcal{F}_n$ colorées (correctes ou non), avec $\mathcal{F}_n = (F_1, F_2, ..., F_n)$ et $\mathbb{P}$ est telle que $F_1, F_2, ..., F_n$ sont colorées par un élément de C avec équiprobabilité et indépendance.

6. Pour une coloration c_i de F_1 avec $1 \leqslant i \leqslant p$, l'entier i désigne **l'indice** de cette coloration.
   Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X donnant l'indice de la coloration de F_1 pour la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, F_2, ..., F_n)$?
   Quelles sont l'espérance et la variance de X ?
7. Montrer que la variable aléatoire Y donnant le nombre de F_i avec $1 \leqslant i \leqslant n$ de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, F_2, ..., F_n)$ ayant pour coloration l'élément c_1 de C suit une loi usuelle que l'on déterminera.

Quelles sont l'espérance et la variance de Y ?

B - Matrice de compatibilité et nombre de colorations correctes

On introduit la matrice $p \times p$ de compatibilité associée à C, notée A_C ou tout simplement A dont les coefficients sont tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } c_i \text{ et } c_j \text{ sont compatibles} \\ 0 & \text{si } c_i \text{ et } c_j \text{ ne sont pas compatibles} \end{cases}$$

Exemple : dans le cas de la FIGURE 2 ci-dessus, on a donc $n = 4$ et on prend $p = 3$ avec :
$c_1 = (B, G)$ (coloration de F_1), $c_2 = (N, B)$ (coloration de F_2 et F_4) et $c_3 = (B, N)$ (coloration de F_3) et donc $C = \{(B, G), (N, B), (B, N)\}$.

Il en résulte que $A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(par exemple, (B, G) et (B, G) ne sont pas compatibles donc $a_{1,1} = 0$ et (N, B) et (B, N) sont compatibles donc $a_{2,3} = 1$).

Dans la suite de cette section, on note $u_n(C)$ le nombre de colorations correctes de la figure $\mathcal{F}_n$ utilisant les colorations de C.

Le but de la fin de cette section est de déterminer une expression de $u_n(C)$ pour $n \geqslant 2$ utilisant la matrice A_C.

8. Un exemple.

   Dans cet exemple, $c_1 = (B, G)$, $c_2 = (G, N)$, $c_3 = (B, N)$; ainsi $C = \{(B, G), (G, N), (B, N)\}$.

   (a) Montrer que $A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Déterminer A_C^2 et en déduire A_C^n pour $n \geqslant 2$. (on distinguera suivant la parité de n).

   (c) Déterminer $u_2(C)$ en représentant les figures $\mathcal{F}_2$ correctement colorées correspondantes et déterminer aussi $u_3(C)$.

   (d) Vérifier que $u_2(C) = \mathrm{tr}(A_C^2)$ et que $u_3(C) = \mathrm{tr}(A_C^3)$.

9. Cas général.

   On revient au cas général et on se donne :

   — une figure $\mathcal{F}_n = (F_1, F_2, ..., F_n)$ avec $n \geqslant 2$;
   — un ensemble $C = \{c_1, c_2, ..., c_p\}$ de colorations correctes de F ;
   — la matrice de compatibilité $A = A_C$ associée à C.

   (a) Soient $c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_n}$ des colorations choisies dans C.
   Montrer qu'en affectant la coloration c_{i_j} à F_j pour $j \in [\![1, n]\!]$, on obtient une bonne coloration de $\mathcal{F}_n$ si et seulement si :

   $$a_{i_1,i_2} \times a_{i_2,i_3} \times ... \times a_{i_{n-1}} \times a_{i_n,i_1} = 1$$

   (b) En déduire que $u_n(C) = \mathrm{tr}(A_C^n)$.

   (c) Soit $n \geqslant 2$. Quelle est la probabilité pour qu'une figure $\mathcal{F}_n = (F_1, F_2, ..., F_n)$ choisie au hasard et telle que les colorations de chaque F_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) soient prises dans $C = \{(B, G), (G, N), (N, B)\}$, ait une coloration correcte ?

   (d) Même question, les colorations de chaque F_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) étant prises cette fois dans l'ensemble $\{(B, G), (G, B), (B, N), (N, B)\}$.