BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Code sujet : 284**

**Conception : HEC Paris - ESSEC**

---

**MATHÉMATIQUES**

Programme ENS B/L

Vendredi 30 avril 2021, de 8 h. à 12 h.

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

---

# EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, $a$ désigne un réel strictement positif. Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ka+1}$$

La partie 1 établit la convergence de la suite $(S_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite, notée $S(a)$ et les parties 2 et 3 mettent en place, respectivement dans les cas $a=1$ et $a=2$, des accélérations de convergence.

## *Partie I - Préliminaires*

1. (a) Pour tout entier naturel $k$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{ka}\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel $n$, l'égalité suivante :

$$S_n(a) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{na+a}}{1+t^a}\mathrm{d}t$$

   (c) Montrer que la suite $(S_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite $S(a)$ vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\mathrm{d}t$.

2. Établir, pour tout entier naturel $n$, l'égalité suivante :

$$\frac{1}{1+t^a} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^a)^k}{2^{k+1}} + \frac{(1-t^a)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^a)}$$



**Tournez la page S.V.P.**

## *Partie II - Cas $a = 1$*

On suppose dans cette partie que $a = 1$.

3. Donner la valeur de $S(1)$.
4. Établir l'inégalité suivante :
$$|S(1) - S_n(1)| \leq \frac{1}{(n+2)}$$
5. (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+2)2^{n+1}}$.

   (b) En déduire que $\left|S(1) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}(n+2)}$ et que $S(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}$.

## *Partie III - Cas $a = 2$*

On suppose dans cette partie que $a = 2$.

6. On pose, pour tout entier naturel $n$ : $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $J_{n+1} - J_n$ en fonction de $J_{n+1}$.

   (b) En déduire que $J_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} J_n$.

   (c) Calculer $J_n$ en fonction de $n$.
7. Rappeler l'expression de la dérivée de la fonction arctan et en déduire la valeur de $S(2)$.
8. Montrer que $\left|S(2) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et que $S(2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}$.

# EXERCICE 2

On note $n$ un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et de son produit scalaire canonique noté $\langle\ |\ \rangle$. On note $\|.\|$ la norme associée.
Soit $p$ un entier vérifiant $1 \leq p \leq n$.
À toute famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on associe la matrice $G = (g_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq p}}$ de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, appelée matrice de Gram de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on a $g_{i,j} = \langle u_i | u_j \rangle$.
Ainsi on a :
$$G = \begin{pmatrix} \langle u_1|u_1\rangle & \langle u_1|u_2\rangle & \ldots & \langle u_1|u_p\rangle \\ \langle u_2|u_1\rangle & \langle u_2|u_2\rangle & \ldots & \langle u_2|u_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle u_p|u_1\rangle & \langle u_p|u_2\rangle & \ldots & \langle u_p|u_p\rangle \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question, on suppose que $n = p = 3$ et on considère les trois vecteurs :

$$u_1 = (1,-1,0),\ u_2 = (1,0,-1),\ u_3 = (1,1,1)$$

   (a) Déterminer la matrice de Gram $G$ de $(u_1,u_2,u_3)$.

   (b) Exprimer $G^2$ en fonction de $G$ et de $I_3$, où $I_3$ est la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   (c) En déduire que si $\lambda$ est valeur propre de $G$, alors $\lambda$ vérifie l'équation : $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$.

   (d) Déterminer les valeurs propres de $G$ et la dimension des sous-espaces propres associés.

   (e) En déduire que $G$ est diagonalisable.

*Dans toute la suite de l'exercice, on revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2.*

2. Soit $p$ un entier appartenant à $[\![1,n]\!]$ et $(u_1,u_2,\ldots,u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On pose $F$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(u_1,u_2,\ldots,u_p)$ et on note $G$ la matrice de Gram de $(u_1,u_2,\ldots,u_p)$.

On considère des réels $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p$ et on pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ .

   (a) Montrer que si $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j = 0$, alors $GX = 0$.

   (b) On suppose réciproquement que $GX = 0$. On note $F^\perp$ l'orthogonal de $F$.
   Montrer que $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j$ appartient à $F^\perp$ et en déduire que $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j = 0$.

   (c) Déduire de ce qui précède que la famille $(u_1,u_2,\ldots,u_p)$ est libre si et seulement si la matrice $G$ est inversible.

3. On considère dans cette question une famille $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\quad \|v_i\| = 1 \text{ et } \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad i \neq j,\quad \|v_i - v_j\| = 1$$

   (a) Pour tous $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}^n$, exprimer $\langle a|b\rangle$ à l'aide de $\|a+b\|^2$, de $\|a\|^2$ et de $\|b\|^2$.

   (b) En déduire la matrice de Gram $G$ de $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$.

   (c) On pose $A = 2G$ et on note $J$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et enfin $I_n$ la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

      i. Calculer $A^2$ en fonction de $n$, $I_n$ et $J$, puis en fonction de $n$, $A$ et $I_n$.

      ii. Prouver que $A$ est inversible.

      iii. En déduire que $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

4. Soit $\mathscr{B}_1 = (w_1,w_2,\ldots,w_n)$ une base quelconque de $\mathbb{R}^n$ et soit $G$ la matrice de Gram de $(w_1,w_2,\ldots,w_n)$.

Soit $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

On pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} \langle x|w_1\rangle \\ \langle x|w_2\rangle \\ \vdots \\ \langle x|w_n\rangle \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.



**Tournez la page S.V.P.**

(a) Justifier que $G$ est inversible et montrer que $X = G^{-1}Z$.

(b) Montrer qu'il existe une unique famille $\mathscr{B}_1^* = (w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle w_i^* | w_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(c) Montrer que $\mathscr{B}_1^*$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(d) Donner, à l'aide des $w_i^*$, les coordonnées d'un vecteur $x$ de $\mathbb{R}^n$ dans la base $\mathscr{B}_1$.

(e) On note $G^*$ la matrice de Gram de $(w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*)$. Exprimer les coordonnées de chaque vecteur $w_j^*$ ($j \in [\![1,n]\!]$) à l'aide des coefficients de $G^*$.

# PROBLÈME

Le but de ce problème est d'étudier les liens d'amitié dans un réseau social. On cherchera en particulier, lorsque le réseau contient beaucoup d'individus, la probabilité sous certaines hypothèses qu'une personne soit sans ami.

On rappelle que la notation exp désigne la fonction exponentielle.

## *Partie I - Quelques résultats préliminaires*

### *A - Étude de suites*

Dans toute cette section, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite à valeurs dans $]0,1[$ et de limite nulle.

1. Montrer que pour tout $x \in ]0,1[$, $\ln(1-x) \leq -x$.
2. Dans cette question, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(nu_n - \ln(n)\right) = +\infty$.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n(1-u_n)^n\right) = 0$ (on pourra écrire $n(1-u_n)^n$ sous forme exponentielle et utiliser la question précédente).
3. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 pour la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par $x \mapsto \ln(1-x)$.
4. Dans cette question, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(nu_n - \ln(n)\right) = -\infty$.

   (a) Montrer que $u_n \leq \dfrac{\ln(n)}{n}$ à partir d'un certain rang.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n(1-u_n)^n\right)$.
5. Dans cette question, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(nu_n - \ln(n)\right) = \alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{nu_n}{\ln(n)}\right) = 1$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} (nu_n^2) = 0$.

   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n(1-u_n)^n\right) = \exp(-\alpha)$.

### *B - Étude de polynômes*

Pour $n$ dans $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $n$.
Pour $k$ dans $\mathbb{N}$, on définit les polynômes $P_k$ et $Q_k$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_k(x) = x^k \quad \text{et} \quad Q_k(x) = x(x-1)\cdots(x-k+1)$$

(avec la convention $P_0(x) = Q_0(x) = 1$).

6. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
7. En déduire que $P_n$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ et que la décomposition est unique.
8. À titre d'exemple, exprimer $P_3$ comme combinaison linéaire de $(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.

### *C - Événement asymptotiquement presque sûr*

Dans cette section, on désigne par $(\Omega, \mathscr{E}, P)$ un espace probabilisé. On rappelle que :

- $\Omega$ est l'univers,
- $\mathscr{E}$ est l'ensemble des événements : il est constitué de parties de $\Omega$,
- $P$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{E})$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathscr{E}$.
On dit que l'événement $A_n$ est réalisé **asymptotiquement presque sûrement** si $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$.
On étudie maintenant deux cas particuliers fondamentaux.
Dans les deux questions qui suivent, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{E}, P)$ à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$.

9. On suppose dans cette question, que les variables aléatoires $S_n$ admettent une espérance notée $E(S_n)$.
   En utilisant l'inégalité de Markov que l'on rappellera, montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} E(S_n) = 0$, alors asymptotiquement presque sûrement, $S_n = 0$.
10. On suppose dans cette question, que les variables aléatoires $S_n$ admettent une espérance notée $E(S_n)$ et un écart-type noté $\sigma(S_n)$. On suppose que $E(S_n) > 0$.
    Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sigma(S_n)}{E(S_n)} = 0$, alors asymptotiquement presque sûrement, $S_n > 0$.

## *Partie II - Étude d'un réseau d'amis*

Dans toute cette partie, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2.
L'ensemble $[\![1,n]\!] = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$ représente un groupe de personnes dont on veut étudier les liens d'amitiés dans un réseau.
On dispose d'une suite de réels $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans l'intervalle $]0,1[$ et on suppose dans toute la suite du problème que $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} p_k = 0}$.
Pour $i$ et $j$ dans $[\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$, la paire $\{i,j\}$ représente un lien d'amitié entre $i$ et $j$.
On note $L$ l'ensemble des paires $\{i,j\}$ lorsque $i$ et $j$ parcourent l'ensemble $[\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$ et $\Omega$ l'ensemble $\mathscr{P}(L)$ des parties de $L$.



**Tournez la page S.V.P.**

Un élément $A$ de $\Omega$ qui est donc un ensemble de paires, représente des liens entre personnes qui se sont rajoutées en amis sur le réseau.
On suppose disposer d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{E}, P)$ tel que pour toute paire $\{i,j\}$ avec $i \neq j$, celle-ci apparaît dans un élément $A$ de $\Omega$ avec indépendance et avec la probabilité $p_n$.
Autrement dit, deux personnes quelconques qui s'ajoutent en amis dans le réseau, le font avec indépendance vis à vis des autres personnes et avec une probabilité $p_n$.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note $X_k$ la variable aléatoire telle que pour $A$ dans $\Omega$, $X_k(A) = 1$ si $k$ n'a pas d'ami dans un réseau $A$ et 0 sinon.

Par exemple, pour $n = 4$, on a $L = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$.
Si on prend $A = \{\{1,3\},\{3,4\}\}$, on a $P(A) = p_4^2(1-p_4)^4$ ;
par ailleurs, $X_3(A) = 0$ car 3 a un ami (et même deux) dans le réseau $A$ ;
par contre $X_2(A) = 1$ car 2 n'a pas d'ami dans ce réseau $A$.

On ne suppose plus dorénavant que $n = 4$.

11. Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?
12. Exprimer la variable aléatoire $S_n$ représentant le nombre d'individus sans ami en fonction des $X_k$ $(1 \leq k \leq n)$.
13. En déduire que l'espérance de $S_n$ vaut $E(S_n) = n(1-p_n)^{n-1}$.
14. En déduire que si $\lim\limits_{n\to+\infty}(np_n - \ln(n)) = +\infty$, asymptotiquement presque sûrement, il n'y a pas de réseau contenant un individu sans ami.
15. Montrer que $E(S_n^2) = E(S_n) + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}$.
16. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}(np_n - \ln(n)) = -\infty$.
    (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{E(S_n^2) - E(S_n)^2}{E(S_n)^2}\right) = 0$.
    (b) En déduire que asymptotiquement presque sûrement, tous les réseaux contiennent au moins un individu sans ami.

## *Partie III - Étude dans l'intervalle de seuil*

On reprend les notations de la partie précédente.
Dans cette partie, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}(np_n - \ln(n)) = \alpha \in \mathbb{R}$.

On se propose de déterminer la limite, lorsque $n$ tend vers $+\infty$, de la probabilité qu'un réseau de personnes contienne un individu sans ami.

Si $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si $k$ est un entier naturel, on rappelle que le moment d'ordre $k$ de $X$, noté $m_k(X)$, est la somme de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^k P(X=n)$, si celle-ci converge.

En vertu du théorème de transfert et dans la mesure d'existence, on a $m_k(X) = E(X^k)$.
On appelle **moment factoriel** d'ordre $k$ de $X$, et on note $mf_k(X)$, la somme de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n(n-1)\cdots(n-k+1)P(X=n)$$

si celle-ci converge (avec la convention $n(n-1)\cdots(n-k+1) = 1$ si $k = 0$).
On a, dans la mesure d'existence, $mf_k(X) = E\big(X(X-1)\cdots(X-k+1)\big)$.

17. Montrer que si $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ strictement positif, alors pour tout $k$ entier naturel, $mf_k(X)$ existe et vaut $\lambda^k$.

On admet le théorème suivant :

> Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ admet, pour tout $k$ entier naturel, un moment d'ordre $k$ noté $m_k(S_n)$ ;
> soit $\lambda$ un réel strictement positif et soit $S$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ ; on note, pour $k \in \mathbb{N}$, $m_k(S)$ le moment d'ordre $k$ de $S$.
> Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} m_k(S_n) = m_k(S)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n = k) = P(S = k)$.

On reprend les notations de la partie précédente concernant la variable aléatoire $S_n$ : celle-ci représente le nombre d'individus sans ami.

18. Le théorème encadré précédent est-il encore valable si on remplace les moments $m_k$ par les moments factoriels $mf_k$ ?

19. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(S_n) = \exp(-\alpha)$ (notations du début de cette partie).

20. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$mf_k(S_n) = \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{j=k}^{n}\binom{n-k}{j-k}P(X_1=1,X_2=1,\ldots,X_j=1,X_{j+1}=0,X_{j+2}=0,\ldots,X_n=0)$$

et en déduire que :

$$mf_k(S_n) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1-p_n)^{\frac{2nk-k^2-k}{2}}$$

21. En déduire la limite de la probabilité qu'un réseau de personnes contienne un individu sans ami.