BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC BS – HEC Paris

MATHÉMATIQUES B/L

FILIÈRE LITTÉRAIRE

Programme ENS B/L

Mardi 29 avril 2025, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice

Partie I.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln(u_n).$$

1. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bien définies.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n - v_{n+1} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

3. (a) Rappeler le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3, au voisinage de 0.
   (b) En déduire qu'il existe une fonction ε définie sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de limite nulle en 0 et telle que

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right).$$

   (c) Déterminer la nature de la série de terme géneral $v_n - v_{n+1}$.

4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement positif.

Partie II.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t.$$

6. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est un réel strictement positif.
   (b) Calculer I_0, I_1 et I_2.
7. (a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$
   (b) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t.$$
8. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$
   (b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.
9. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation simple liant I_{n+1} et I_n.
   (b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$
10. (a) Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{I_n}{u_n^2}\right)$$
    (b) En déduire la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4^n\, n^{2n+1}\mathrm{e}^{-2n}}{(2n+1)!}\right).$$
11. Dans cette question, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et l'on définit une fonction f_n par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{I_n}(1-t^2)^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
    (a) Vérifier que f_n est une densité de probabilité.
    On note alors X_n une variable aléatoire admettant f_n comme densité.
    (b) Montrer que X_n admet une espérance et exprimer cette espérance en fonction de n.
    (c) Montrer que X_n^2 admet une espérance et exprimer cette espérance en fonction de n. En déduire la variance de X_n en fonction de n.

PROBLÈME.

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Si p et q sont deux entiers tels que $p \leqslant q$, alors $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $p \leqslant k \leqslant q$.

Partie I.

1. Questions de cours. Soit A une matrice élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre de A.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de A pour que A soit inversible.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. Dans cette question seulement, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Partie II.

On désigne par $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels de degré au plus $n-1$. On confondra polynôme et fonction polynomiale associée.
On considère l'application F_n définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[x], \qquad F_n(P) = Q \qquad \text{avec} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q(x) = P(x) + \frac{1-x}{n} P'(x).$$

3. Montrer que F_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on définit P_k et Q_k en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_k(x) = x^{n-k} \qquad \text{et} \qquad Q_k = F_n(P_k).$$

4. (a) Montrer que $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
   On appellera désormais $\mathcal{B}$ cette base.
   (b) Expliciter Q_n.
   (c) Montrer que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q_k(x) = \frac{k}{n} P_k(x) + \frac{n-k}{n} P_{k+1}(x).$$

   (d) Soit M_n la matrice représentative de F_n dans la base $\mathcal{B}$. Vérifier que la matrice M_n est triangulaire et donner ses coefficients diagonaux.
5. **Dans cette question seulement**, on se place dans le cas $n = 2$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de F_2 et une base de chaque sous-espace propre.
   (b) Soit T la fonction polynomiale définie par $T : x \mapsto 2x + 1$. Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale $S \in \mathbb{R}_1[x]$ telle que $F_2(S) = T$. Déterminer S.

6. On revient au cas général avec n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.
   (a) La matrice M_n est-elle inversible ? Justifier.
   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M_n.
   (c) La matrice M_n est-elle diagonalisable ? Justifier.
   (d) Déterminer le sous espace propre de F_n associé à la valeur propre 1.
7. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Justifier l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x] - \{0\}$ tel que $F_n(P) = \dfrac{n-k}{n} P$.
   Dans la suite de cette question, on considère un tel polynôme P.

(b) Calculer $P(1)$. En déduire qu'il existe $r \in [\![1, n-1]\!]$ et $R \in \mathbb{R}_{n-2}[x]$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)^r R(x) \qquad \text{et} \qquad R(1) \neq 0.$$

(c) Montrer que $r = k$.

(d) Montrer que R est un polynôme constant.

(e) Déterminer une base de vecteurs propres de F_n.

8. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on définit V_k en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad V_k(x) = (x-1)^k.$$

(a) Montrer que $(V_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ forme une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

(b) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, exprimer $F_n^i(V_k)$ en fonction de V_k où la suite $(F_n^i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est définie par récurrence comme suit : $F_n^1 = F_n$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*, F_n^{i+1} = F_n^i \circ F_n$.

9. On considère la suite de polynômes $(U_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad U_1(x) = x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \quad U_{j+1} = F_n(U_j).$$

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad U_1(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} V_k(x).$$

(b) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'écriture de U_j sur la base $(V_0, V_1, \ldots, V_{n-1})$.

(c) Montrer que

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \qquad U_j(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1} (-1)^k.$$

Partie III.

Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Sur un marché, n sites marchands proposent un même produit à la vente. Lorsqu'un client arrive, il passe une et une seule commande en choisissant l'un des sites marchands de façon équiprobable. Les commandes se font successivement et de manière indépendante.
Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on note X_j la variable aléatoire réelle indiquant le nombre de sites ayant reçu au moins une commande après que j commandes ont été passées.

10. Énoncer la formule des probabilités totales.

11. Soit $j \in \mathbb{N}^*$

(a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et $k \leqslant j$. Déterminer $\mathbb{P}(X_{j+1} = k \mid X_j = k)$. Justifier.

(b) Soit $k \in [\![2, n]\!]$ et $k-1 \leqslant j$. Déterminer $\mathbb{P}(X_{j+1} = k \mid X_j = k-1)$. Justifier.

(c) Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $i \in [\![1, n]\!] - \{k, k-1\}$. Déterminer $\mathbb{P}(X_{j+1} = k \mid X_j = i)$. Justifier.

(d) Montrer que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}(X_{j+1} = k) = \frac{k}{n}\mathbb{P}(X_j = k) + \frac{n-k+1}{n}\mathbb{P}(X_j = k-1).$$

12. On pose désormais

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_j = k)\, x^{n-k}.$$

(a) Déterminer la loi de X_1. En déduire une expression simple de G_1.

(b) Prouver que

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \qquad G_{j+1} = F_n(G_j).$$

(c) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $G_j = U_j$, où $(U_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est la suite de polynômes définie dans la Partie II.

(d) Montrer que que

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X_j = n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{j-1} (-1)^k.$$

(e) Soit j un entier tel que $1 \leqslant j < n$. Déterminer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1} (-1)^k.$$

13. Dans toute cette question, j est un entier naturel non nul.

(a) Justifier l'existence de l'espérance de X_j. On notera $\mathbb{E}(X_j)$ l'espérance de X_j.

(b) Calculer $G_j(1)$.

(c) Déterminer une expression de $G_j'(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_j)$ et de n.

(d) Montrer que la suite $(G_j'(1))_{j\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique.

(e) Déterminer l'expression de $\mathbb{E}(X_j)$ en fonction de j et de n.

(f) Calculer

$$\lim_{j\to+\infty} \mathbb{E}(X_j)$$

Le résultat trouvé vous semble-t-il conforme à l'intuition ? Comment l'interprétez-vous ?

Partie IV

On désigne par T la variable aléatoire réelle indiquant le nombre de clients ayant déjà procédé à une commande lorsque, pour la première fois, chacun des n sites marchands a été choisi au moins une fois.

14. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

(a) Comparer les événements $[T \leqslant j]$ et $[X_j = n]$.

(b) En déduire que

$$\mathbb{P}(T = j+1) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k} \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{j-1}.$$

15. (a) En déduire que

$$\mathbb{E}(T-1) = n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

(b) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x^{k-1}.$$

(c) Conclure que

$$\mathbb{E}(T) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1178 – D'après documents fournis