



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2011

Conception : H.E.C

OPTION LITTÉRAIRE

MATHÉMATIQUES

Filière B/L

Vendredi 6 mai 2011, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème 1

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et on note E_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . On confondra polynôme et fonction polynomiale associée.

On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E_n où, pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme e_i est défini par : $e_i(x) = x^i$.

On considère la famille de polynômes $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ définie par : $H_0 = 1$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $H_i(x) = \frac{x(x-i)^{i-1}}{i!}$.

Pour tout élément P de E_n , on définit $f(P)$ par : $(f(P))(x) = xP(x) + (x-1) \int_0^x P(t)dt$.

Partie 1

1. (a) Vérifier que $f(P)$ est un polynôme et que $(f(P))(0) = (f(P))'(0) = 0$, où $(f(P))'$ est la dérivée de $f(P)$.
- (b) En déduire que pour tout P de E_n , le polynôme $f(P)$ est divisible par x^2 .
- (c) On définit sur E_n l'application T par : pour tout élément P de E_n , $f(P)(x) = x^2(T(P))(x)$, c'est-à-dire que $(T(P))(x)$ est le quotient dans la division euclidienne de $(f(P))(x)$ par x^2 .
Montrer que T est un endomorphisme de E_n .

2. (a) Soit M la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $M =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{n}{n+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

- (b) Déterminer les valeurs propres de T et en déduire que T est diagonalisable.

3. On considère la famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ d'éléments de E_n , où $Q_0 = 1$ et pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $Q_i(x) = H_i(x-1)$.
- (a) Établir pour tout i de $\llbracket 0, n \rrbracket$, la relation suivante : $Q_i = H'_{i+1}$, où H'_{i+1} est la dérivée de H_{i+1} .
- (b) En déduire que le sous-espace propre de T associé à la valeur propre $\frac{1}{i+1}$ est le sous-espace engendré par le polynôme Q_i .
4. On note pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et tout entier naturel j , $H_i^{(j)}$ la dérivée d'ordre j de la fonction H_i .
- (a) Montrer que pour tout entier j inférieur ou égal à i , on a : $H_i^{(j)}(x) = H_{i-j}(x-j)$.
- (b) Calculer pour tout j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $H_i^{(j)}(j)$.
- (c) Montrer que la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de E_n .
- (d) Montrer pour tout polynôme P de E_n , la formule suivante : $P = \sum_{i=0}^n P^{(i)}(i) H_i$.

Partie 2

Les notations sont celles de la partie 1.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Une urne contient une boule rouge et n boules blanches. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule « au hasard » selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

On note X_0 la variable aléatoire constante égale à n . Pour tout entier naturel j non nul, on note X_j la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $j^{\text{ème}}$ tirage.

Les variables aléatoires X_j ($j \in \mathbb{N}$) sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On considère pour tout entier naturel j , la matrice colonne U_j de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ définie par : $U_j = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_j = 0]) \\ \mathbb{P}([X_j = 1]) \\ \vdots \\ \mathbb{P}([X_j = n]) \end{pmatrix}$.

On note pour tout entier naturel j , G_j la fonction polynomiale définie par : $G_j(x) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_j = k]) x^k$.

5. Montrer pour tout entier naturel j , la relation suivante : $U_{j+1} = MU_j$.
6. En déduire pour tout entier naturel j , les formules : $G_{j+1} = T(G_j)$ et $G_j = T^j(G_0)$.
7. (a) Vérifier que $G_0(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x-1)^k$.
- (b) En utilisant la formule obtenue à la question 4.(d), montrer pour tout k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, la relation suivante :

$$(x-1)^k = \sum_{i=0}^k i! \binom{k}{i} i^{k-i} Q_i(x)$$

(c) En déduire que $G_0(x) = \sum_{i=0}^n i! \binom{n}{i} (1+i)^{n-i} Q_i(x)$.

(d) Donner alors pour tout entier naturel j , l'expression de G_j comme combinaison linéaire des polynômes $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$.

8. (a) Montrer pour tout couple (j, k) d'entiers naturels, l'égalité suivante : $\mathbb{P}([X_j = k]) = \frac{G_j^{(k)}(0)}{k!}$.
- (b) En utilisant la question 4.(a), montrer que pour tout entier naturel j , la loi de X_j est donnée par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X_j = k]) = (k+1) \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (1+i+k)^{n-k-j-1}$$

Problème 2

Partie 1

On considère les suites $(a_n)_{n \geq 1}$, $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(H_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$$

$$\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\forall n \geq 1, H_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

1. (a) Établir pour tout entier naturel k non nul, l'encadrement suivant :

$$0 \leq a_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

- (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est majorée.
2. (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente et que sa limite γ appartient à $[0, 1]$.
(b) En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(n) - H_{n+1})$.

Partie 2

Sous réserve de convergence, on pose : $I_0 = \int_0^1 \ln(t) dt$, et pour tout entier k supérieur ou égal à 1,

$$I_k = \int_0^1 (1-t)^k \ln(t) dt.$$

3. (a) Montrer que l'intégrale définissant I_0 est convergente et donner sa valeur.
(b) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 1, l'intégrale définissant I_k est convergente.
4. (a) Établir pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la relation suivante :

$$I_k = I_{k-1} - \int_0^1 t(1-t)^{k-1} \ln(t) dt$$

- (b) À l'aide d'une intégration par parties dont on justifiera la validité, montrer que l'on a :

$$\int_0^1 t(1-t)^{k-1} \ln(t) dt = \frac{I_k}{k} + \frac{1}{k(k+1)}$$

- (c) En déduire pour tout entier naturel n , l'égalité suivante :

$$(n+1)I_n = - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

5. (a) Établir pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$\frac{1}{n} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = I_n + \frac{\ln(n)}{n+1}$$

- (b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

Partie 3

Les notations sont celles des parties 1 et 2.

Sous réserve de convergence, on pose : $J_0 = \int_0^1 \ln^2(t) dt$, et pour tout entier k supérieur ou égal à 1,

$$J_k = \int_0^1 (1-t)^k \ln^2(t) dt.$$

6. (a) Montrer que l'intégrale définissant J_0 est convergente et donner sa valeur.
(b) Montrer que pour tout entier naturel k non nul, l'intégrale définissant J_k est convergente.

7. (a) Établir pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la relation suivante :

$$J_k = J_{k-1} - \int_0^1 t(1-t)^{k-1} \ln^2(t) dt$$

- (b) Montrer pour tout entier naturel k non nul, la relation suivante : $(k+1)J_k - kJ_{k-1} = -2I_k$.

- (c) En déduire les égalités suivantes :

$$\text{pour tout entier naturel } n, (n+1)J_n = 2 \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^k \frac{1}{ki} \text{ et } (n+1)J_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right)^2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}$$

8. (a) Établir pour tout entier n supérieur ou égal à 1, les égalités suivantes :

$$\text{i. } \int_0^n \ln^2(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n}{n+1} \ln^2(n) + 2n \ln(n) I_n + n J_n$$

$$\text{ii. } \frac{n+1}{n} \int_0^n \ln^2(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = (\ln(n) + (n+1)I_n)^2 - (n+1)^2 I_n^2 + (n+1)J_n$$

- (b) On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \ln^2(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2$.

Partie 4

On considère une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $Y = -\ln X$, et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On admet dans cette partie l'égalité suivante, valable pour tout entier naturel m :

$$\int_0^{+\infty} \ln^m(t) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \ln^m(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

9. (a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y .
 (b) Donner une densité f_Y de Y .
10. (a) Montrer que Y admet une espérance, que l'on note $E(Y)$.
 (b) En utilisant l'égalité admise dans le préambule de cette partie, calculer $E(Y)$.
 (c) Calculer de même la variance de Y , que l'on note $V(Y)$.
11. On considère une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes la même loi que Y .

On pose, pour tout entier naturel n non nul : $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$.

- (a) Calculer $E(T_n)$ et $V(T_n)$.

- (b) Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\sqrt{6n} \left(\frac{T_n - \gamma}{\pi} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.