

Conception : HEC Paris

Programme ENS B/L

MATHÉMATIQUES

Jeudi 28 avril 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

1. Montrer que pour tout x réel, l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.

Dans toute la suite de l'exercice, on note f la fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

2. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et montrer que sa fonction dérivée f' vérifie la relation :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = -1 + 2xf(x).$$

- 3.a) Établir pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité : $2xf(x) \leq 1$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Quel est le signe de $f'(x)$ pour $x \geq 0$?

- 4.a) En utilisant une densité de loi normale, donner la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

b) En déduire la valeur de $f(0)$ ainsi que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

c) Donner pour tout x réel, l'expression de $f(x) + f(-x)$ en fonction de x .

d) En déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \leq 0$.

5. Pour tout $x > 0$ et tout $A > 0$, on pose : $I_A(x) = \int_x^A e^{-t^2} dt$.

a) À l'aide d'intégrations par parties, établir la relation :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3e^{x^2}}{4} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt.$$

b) En déduire que $f(x)$ est équivalent à $\frac{1}{2x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6.a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

b) On pose $f^{(0)} = f$ et pour tout entier $n \geq 1$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f .

Établir pour tout entier naturel n , l'existence de deux fonctions polynômes P_n et Q_n telles que pour tout x réel, on a : $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x) + Q_n(x)$.

c) Déterminer, pour $n \geq 1$, les termes de plus haut degré respectifs de P_n et Q_n .

7.a) Établir pour tout entier $n \geq 1$, la relation : pour tout x réel, $f^{(n+1)}(x) = 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , la fonction f admet au voisinage de 0 un développement limité

$$\text{d'ordre } n \text{ qui s'écrit } f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n).$$

Calculer a_0 . Exprimer pour tout entier $k \geq 1$, a_{2k+1} en fonction de a_{2k-1} , puis a_{2k+2} en fonction de a_{2k} .

c) Calculer a_{2k+1} et a_{2k+2} en fonction de k .

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 1 et E est un espace vectoriel de dimension n .

On note id_E l'endomorphisme identité de E . Si f est un endomorphisme de E , on pose $f^0 = \text{id}_E$ et pour tout entier $m \geq 1$, $f^m = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{m \text{ fois}}$. On note $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E et 0_E le vecteur nul de E .

L'objectif de cet exercice est de montrer que pour tout endomorphisme f non nul de E , il existe un entier naturel p non nul tel que $\text{Ker}(f^p) \oplus \text{Im}(f^p) = E$ et de déterminer l'entier p_0 qui est le plus petit des entiers p pour lesquels cette égalité est vérifiée.

1.a) On suppose que l'endomorphisme f est bijectif. Déterminer p_0 .

b) On suppose que f est diagonalisable et non bijectif. Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$.

2. Soit f un endomorphisme de E vérifiant la relation : $f \circ (f - \text{id}_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

a) Calculer $(f - \text{id}_E)^2 + f \circ (2\text{id}_E - f)$.

b) En déduire que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$.

3. Soit m un entier supérieur ou égal à 1. On suppose dans cette question l'existence de réels $a_1, a_2, \dots, a_m$ avec $a_1 \neq 0$, vérifiant la relation : $a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_m f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$.

4. On suppose dans cette question que $E = \mathbf{R}^4$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ dont la matrice A dans la base $\mathcal{B}$ est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f \neq \{0_{\mathbf{R}^4}\}$.

b) Calculer A^2 et A^3 . En déduire le plus petit des entiers p pour lesquels on a : $\text{Ker}(f^p) \oplus \text{Im}(f^p) = \mathbf{R}^4$.

5. Dans cette question, on revient au cas général où $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme non nul de E .

a) Établir pour tout entier naturel k , l'inclusion : $\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$.

b) Comparer les dimensions respectives des deux sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(f^k)$ et $\text{Ker}(f^{k+1})$.

c) À l'aide d'une démonstration par l'absurde et en raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe un entier naturel m pour lequel $\text{Ker}(f^m) = \text{Ker}(f^{m+1})$.

d) On note p_0 le plus petit des entiers naturels p pour lesquels $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel k , on a : $\text{Ker}(f^{p_0}) = \text{Ker}(f^{p_0+k})$.

e) Montrer que $\text{Im}(f^{p_0}) \cap \text{Ker}(f^{p_0}) = \{0_E\}$.

6. *Exemple.* On suppose que $E = \mathbb{R}^6$ et que la matrice P de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^6$ est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note p_0 le plus petit des entiers naturels p tels que $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$.

Vérifier que $p_0 = 3$ et que $\text{Ker}(f^3) \oplus \text{Im}(f^3) = \mathbb{R}^6$.

EXERCICE 3

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. On pose : $q = 1 - p$.

On dispose d'une urne contenant des boules rouges en proportion p et des boules vertes en proportion q .

On effectue dans cette urne une suite de tirages d'une boule avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne une boule rouge. On suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues avant l'apparition de la première boule rouge et on pose $Z = -1$ si l'on n'obtient jamais une boule rouge.

On dit que Z suit la loi binomiale négative de paramètre p .

1.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $P([Z = n]) = p q^n$.

b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} P([Z = n])$ et en déduire la valeur de $P([Z = -1])$.

2.a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z + 1$.

b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z .

3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes les deux la loi binomiale négative de paramètre p . On pose : $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

Montrer que la loi du couple (U, V) est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P([U = i] \cap [V = j]) = \begin{cases} 2p^2 q^{i+j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i < j \\ p^2 q^{2i} & \text{si } i = j \end{cases}.$$

4. Montrer que la loi de U est donnée par : $\forall i \in \mathbb{N}, P([U = i]) = p q^i (2 - q^i - q^{i+1})$.

- 5.a) Déterminer la loi de V et vérifier que V suit une loi binomiale négative dont on précisera le paramètre.
 b) En déduire l'espérance $E(V)$ de la variable aléatoire V .
- 6.a) Exprimer $U + V$ en fonction de X et Y . En déduire l'espérance $E(U)$ de la variable aléatoire U .
 b) Par une méthode analogue à celle de la question précédente, exprimer la covariance $\text{Cov}(U, V)$ des variables aléatoires U et V en fonction de q .
7. Soit X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale négative de paramètre p .
 On pose : $T = X_1 + X_2$ et $W = X_2 + X_3$.
- a) Déterminer la loi de la variable aléatoire T .
 b) Soit m un entier naturel. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $[T = m]$, c'est-à-dire, donner pour tout entier naturel k , la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{[T=m]}([X_1 = k])$.
 c) Calculer $\text{Cov}(T, W)$. Les variables aléatoires T et W sont-elles indépendantes ?
 d) Calculer la variance de la variable aléatoire $T + W$.
 e) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(T, W)$ des variables aléatoires T et W .
 f) Déterminer la loi du couple (T, W) .

EXERCICE 4

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, telle que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{2}{a} \left(1 - \frac{t}{a}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- 1.a) Vérifier que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire.

Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

- b) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .
 c) Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .
2. On pose $Z = \max(X, a - X)$, $T = \min(X, a - X)$ et $Q = \frac{T}{Z}$. On admet que Z , T et Q sont des variables aléatoires et on note F_Z , F_T et F_Q respectivement, les fonctions de répartition de Z , T et Q .
 a) Déterminer F_Z et F_T et vérifier que les variables aléatoires Z et T suivent chacune une loi uniforme.
 b) Déterminer F_Q . Vérifier que Q est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Q .
3. Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On suppose que le paramètre a est inconnu et on veut l'estimer.

On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ et $U_n = \beta \bar{X}_n$ ($\beta \in \mathbf{R}$).

- a) Pour quelle valeur de β , U_n est-il un estimateur sans biais de a ?
 b) On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on donne $\Phi(1,96) \approx 0,975$.
 En appliquant le théorème de la limite centrée à la suite $(U_n)_{n \geq 1}$, donner un intervalle de confiance pour a au risque 0,05 (niveau de confiance égal à 0,95).