BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : HEC Paris

MATHÉMATIQUES

Programme ENS B/L

Jeudi 9 mai 2019, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite réelle *croissante* qui converge vers un réel ℓ.

   Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

   On veut montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge également vers ℓ.

   a) Établir la relation suivante :

   $$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n(n+1)}\left(n\,a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

   b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

   c) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leqslant \ell$.

   d) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'inégalité : $b_{2n} \geqslant \dfrac{b_n + a_n}{2}$.

   e) Déduire des deux questions précédentes que la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ.

2. Montrer que le résultat précédent reste valide si l'on suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est *décroissante*.

On admet que le résultat trouvé dans les questions 1 et 2 reste valide si la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *n'est pas monotone.*

On considère désormais la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}\,.$$

3.a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bien définie.

b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. *On rappelle* que deux suites $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont dites *équivalentes* lorsque n tend vers $+\infty$, s'il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui converge vers 1 et qui vérifie, à partir d'un certain rang, $v_n = t_n \times w_n$.
On dit alors que v_n est *équivalent* à w_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit β un réel non nul.

a) Établir l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \left(\left(1+\frac{1}{u_n^3}\right)^\beta - 1\right) \times u_n^\beta\,.$$

b) À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction qui à tout x réel, associe $(1+x)^\beta$, déterminer un équivalent de $\left(\left(1+\frac{1}{u_n^3}\right)^\beta - 1\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que la suite $\left(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ admet une limite finie non nulle si et seulement si $\beta = 3$.

5. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $a_n = u_{n+1}^3 - u_n^3$.
En utilisant le résultat admis au terme de la question 2, montrer que u_n est équivalent à $\sqrt[3]{3n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Partie 1

Dans toute la Partie 1, on note x un réel de $]0,1[$.

1.a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{i=1}^m i\,x^{i-1} = \frac{1-(m+1)\,x^m + m\,x^{m+1}}{(1-x)^2}\,.$$

b) En déduire que la série de terme général $i\,x^{i-1}$ est convergente et donner la valeur de sa somme $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} i\,x^{i-1}$.

2. Pour tout entier $N \geqslant 2$, on pose : $S_N(x) = \sum\limits_{k=1}^N \frac{x^k}{k}$.

a) Établir l'égalité : $S_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} - \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ est convergente et que sa somme $S(x)$ est donnée par :

$$\forall x \in\,]0,1[,\ S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)\,.$$

Partie 2

À l'exception de la question 5.c), on note n un entier **fixé** *supérieur ou égal à 2.*

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n.

Une expérience consiste à extraire de ce sac un jeton « au hasard », puis à le remettre dans le sac et à effectuer une succession de tirages d'un jeton avec remise.

L'expérience s'arrête dès que l'on tire un jeton portant un numéro non encore obtenu.

On note X le nombre de tirages effectués et on admet que X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$.

On suppose que l'expérience est modélisée avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ainsi, pour tout entier $k \geqslant 2$, l'événement $[X = k]$ est réalisé si les $(k-1)$ premiers tirages donnent le même numéro et si le k-ième tirage donne un numéro différent de celui obtenu lors des $(k-1)$ tirages précédents.

3.a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a : $P([X = k]) = \dfrac{n-1}{n^{k-1}}$.

b) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P([X = k]) = 1$.

c) Montrer que X admet une espérance et à l'aide d'un résultat établi dans la Partie 1, montrer que l'espérance de X est égale à $\dfrac{2n-1}{n-1}$.

4. On pose : $Z = X - 1$.

a) Montrer que la variable aléatoire Z suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

b) Utiliser le résultat de la question précédente pour retrouver la valeur de l'espérance de X et déterminer la variance de X.

5. Pour $k \geqslant 2$, *si l'événement* $[X = k]$ *est réalisé*, on place k boules numérotées de 2 à $k+1$ dans une urne vide et on tire une boule « au hasard » dans cette urne.

On note Y le numéro de la boule tirée et on admet que Y est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$.

a) Établir pour tout entier $j \geqslant 2$, la relation suivante :

$$P([Y = j]) = \sum_{k=\max(2,j-1)}^{+\infty} \frac{1}{k} \times \frac{n-1}{n^{k-1}}.$$

b) À l'aide d'un résultat établi dans la Partie 1, montrer que l'on a :

$$P([Y = 2]) = -(n-1)\left(1 + n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right).$$

c) Dans cette question, on suppose que l'entier n n'est plus fixé.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P([Y = 2])$ et commenter le résultat obtenu.

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, du produit scalaire usuel et de la norme euclidienne associée notés respectivement $\langle\, ,\rangle$ et $\|\,.\,\|$.

Soit u et v deux vecteurs orthogonaux non nuls de $\mathbf{R}^n$ et F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ engendré par u et v.

On considère l'application f définie sur $\mathbf{R}^n$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ f(x) = \langle x, v\rangle\, u + \langle x, u\rangle\, v.$$

1. Montrer que l'application f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

Partie 1

On suppose dans cette partie que $n = 3$ *et que* $u = (1, 0, 1)$ *et* $v = (1, 1, -1)$.

2.a) Vérifier que u et v sont orthogonaux.

b) Calculer $\|u\|$ et $\|v\|$.

3.a) Écrire la matrice A de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

4. Soit w_1 et w_2 les deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ définis par : $\begin{cases} w_1 = \sqrt{3}\, u + \sqrt{2}\, v \\ w_2 = -\sqrt{3}\, u + \sqrt{2}\, v \end{cases}$.

a) Calculer $f(w_1)$ et $f(w_2)$; en déduire deux valeurs propres distinctes non nulles de f.

b) Justifier que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Partie 2

Dans cette partie, on revient au cas général où n *est un entier quelconque supérieur ou égal à 3.*

5.a) Montrer que (u, v) est une base de F.

b) On note $F^{\perp}$ l'orthogonal de F. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = F^{\perp}$.

c) En déduire les dimensions respectives de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

d) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = F$.

6.a) Soit $w \in \mathbf{R}^n$ un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ non nulle de f. Montrer que $w \in \mathrm{Im}(f)$.

b) Donner toutes les valeurs propres de f ainsi que la dimension des sous-espaces propres associés.

c) Justifier que l'endomorphisme f est diagonalisable.

EXERCICE 4

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées être définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Rappels et notations

- Sous réserve d'existence, on note respectivement $E(A)$ et $V(A)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire A.
- On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0, 1)$, si une densité φ de X est donnée par :
$$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big).$$
- Soit $(m, \sigma) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$.
On rappelle que si une variable aléatoire Y suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors la variable aléatoire X définie par $X = \dfrac{Y - m}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
Réciproquement, si X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors la variable aléatoire $\sigma X + m$ suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
- Soit Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
On dit que la variable aléatoire $Z = \exp(Y)$ suit la loi log-normale de paramètres m et σ^2, notée $\mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.
Ainsi, Z suit la loi $\mathcal{LN}(m, \sigma^2)$ si Z est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et si la variable aléatoire $\ln Z$ suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Dans tout l'exercice, on note X *une variable aléatoire qui suit la loi* $\mathcal{N}(0, 1)$ *et* Z *une variable aléatoire qui suit la loi* $\mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

1.a) Vérifier pour tout couple (s,t) de réels, la relation suivante :

$$\exp\Big(-\frac{t^2}{2}+s\,t\Big)=\exp\Big(\frac{s^2}{2}\Big)\times\exp\Big(-\frac{1}{2}(t-s)^2\Big).$$

b) Établir pour tout réel s, l'existence de $E\big(\exp(sX)\big)$ et montrer que l'on a :

$$\forall\, s\in\mathbf{R},\ E\big(\exp(sX)\big)=\exp\Big(\frac{s^2}{2}\Big).$$

c) En déduire les valeurs respectives de $E(Z)$ et $V(Z)$.

d) On note Φ la fonction de répartition de X et F_Z la fonction de répartition de Z.
Exprimer pour tout réel $x>0$, $F_Z(x)$ à l'aide de la fonction Φ.

e) Montrer que la variable aléatoire Z est à densité et déduire de la question précédente qu'une densité f_Z de Z est donnée par :

$$f_Z(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\times\dfrac{1}{x}\times\exp\Big(-\dfrac{(\ln x-m)^2}{2\,\sigma^2}\Big) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

2. On pose : $R=\dfrac{1}{Z}\cdot$ Montrer que la variable aléatoire R suit la loi $\mathcal{LN}(-m,\sigma^2)$.

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{LN}(0,1)$. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose : $W_n=U^n$.
Montrer que la variable aléatoire W_n suit la loi $\mathcal{LN}(0,n^2)$.

4. Soit $(Z_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{LN}(m,\sigma^2)$, avec $0<\sigma\leqslant 2$.
Soit a un réel tel que $0<a<1$.
Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose :

$$\overline{T}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(Z_k),\quad I_n=\overline{T}_n-\frac{2}{\sqrt{n\,a}}\quad\text{et}\quad J_n=\overline{T}_n+\frac{2}{\sqrt{n\,a}}.$$

Montrer que la probabilité que l'intervalle $[\,I_n,J_n\,]$ contienne m est supérieure ou égale à $1-a$.

FIN