

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[x], \forall x \in \mathbb{R}, (\psi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) dt.$$

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. L'endomorphisme ψ est-il injectif ? Est-il bijectif ?
3. L'endomorphisme ψ est-il diagonalisable ?

Exercice 2. Soit $a \in]0, 1]$. Soit X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f définit bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
4. On considère la variable aléatoire Y définie par :

$$Y = \frac{X^2}{2a}.$$

- (a) Déterminer la loi de Y .
 - (b) Montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.
 - (c) En déduire que X admet une variance et que $V(X) = \frac{(4-\pi)a}{2}$.
 - (d) Montrer que X^2 admet une variance et que $V(X^2) = 4a^2$.
5. On suppose dans la suite que le paramètre $a \in]0, 1]$ est inconnu.
Soient $X_i, i \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X .
On note $S_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.
- (a) Donner un intervalle de la forme $[S_n - \alpha_n, S_n + \alpha_n]$ qui soit un intervalle de confiance de a au niveau 95%.
 - (b) Déterminer une valeur de n à partir de laquelle la probabilité que a appartienne à l'intervalle $\left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right]$ soit supérieure ou égale à 95%.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. On dispose de trois boîtes dans lesquelles on place des jetons les uns après les autres. À chaque étape, un jeton est placé au hasard dans l'une des boîtes, les trois boîtes étant équiprobables.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre total de jetons placés dans les trois boîtes lorsque, pour la première fois, deux boîtes sont occupées par au moins un jeton.

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre total de jetons placés dans les trois boîtes lorsque, pour la première fois, les trois boîtes contiennent au moins un jeton.

Exemple : si on place les trois premiers jetons dans la même boîte, le quatrième jeton dans une autre boîte et le cinquième jeton dans la boîte qui était restée vide jusque-là, alors X vaut 4 et Y vaut 5.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
3. Calculer $\mathbb{P}(Y - X > X)$.

Exercice 2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est adaptée à f si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n f(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$$

On admet que si une fonction non identiquement nulle f possède une suite adaptée, alors cette suite est unique.

On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant une suite adaptée.

1. Montrer que la suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction $x \mapsto x - \frac{1}{2}$.
2. Montrer que si f est une fonction dérivable admettant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ comme suite adaptée, alors f' admet la suite $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ comme suite adaptée.
3. On admet dans la suite que l'on peut définir une suite de polynômes $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, B'_p = pB_{p-1} \text{ et } \int_0^1 B_p(t) dt = 0 \end{cases}$$

L'objectif est alors de montrer que pour tout p de $\mathbb{N}$, B_p appartient à E .

- (a) Calculer B_1 et B_2 et vérifier que B_0 et B_1 appartiennent à E .
- (b) Déterminer, pour tout entier naturel p , le degré et le coefficient dominant de B_p .

TSVP

- (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que B_{p-1} appartient à E et on cherche à montrer que B_p appartient aussi à E .
- Montrer que si B_p appartient à E , alors sa suite adaptée est la suite $\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{n^{p-1}}B_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$ est constante.
 - Calculer $\int_0^{1/n} \varphi(x) dx$.
 - Conclure.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
2. Dans la suite de l'exercice, on cherche à résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation :

$$(E) \quad M^2 = A.$$

- (a) Montrer que si M est une solution de (E) , alors A et M commutent.
- (b) Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M .
- (c) En déduire que si M est une solution de (E) , alors M est diagonalisable.
- (d) Déterminer toutes les solutions de (E) .

Exercice 2. Soit a et b deux réels strictement positifs, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a}{b} \left(\frac{b}{x} \right)^{a+1} & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{si } x < b. \end{cases}$$

1. Justifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . On dit alors que X suit la loi de Pareto de paramètres a et b .
 - (a) Déterminer la fonction de répartition de X . On la notera F .
 - (b) Pour x et y deux réels positifs, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X \geq x+y | X \geq x)$ puis sa limite quand x tend vers $+\infty$.
 - (c) X admet-elle une espérance ? Si oui, la déterminer.

3. On considère un réseau de télécommunication chargé de transmettre N mots, chaque mot étant formé de lettres.

On suppose que le nombre de lettres d'un mot, exprimé en milliers, peut être modélisé par la variable aléatoire X définie à la question précédente.

Exemples :

Pour un mot comportant 43682 lettres, X est égale à 43,682.

Pour un mot comportant 15 lettres, X est égale à 0,015.

- (a) Comment interpréter la limite obtenue dans la question 2.(b) dans le cadre de ce modèle ?

TSVP

- (b) Pour ℓ réel strictement positif, on note n_ℓ le nombre de mots formés d'au moins ℓ milliers de lettres.

Démontrer que :

$$n_\ell = (1 - F(\ell))N$$

En déduire une expression de n_ℓ en fonction de N, a et b .

- (c) On appelle X' la variable aléatoire qui représente le nombre de lettres d'un mot exprimé en centaines de milliers.

Exprimer X' en fonction de X puis montrer que X' suit aussi une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. On suppose que le nombre N_t de clients entrant dans un magasin pendant un intervalle de temps de longueur $t > 0$ suit une loi de Poisson de paramètre t .

Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n l'instant où le n -ième client entre dans le magasin.

1. Pour tout entier naturel non nul n et tout réel t strictement positif, exprimer l'événement $[T_n \leq t]$ à l'aide de la variable N_t .
2. Déterminer la loi de T_1 , son espérance et sa variance.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de T_n . On en donnera une expression sous forme d'une somme d'un nombre fini de termes.
4. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une densité de T_n et en déduire, pour tout entier naturel k , la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt$.
5. La variable T_n possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 2. Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est une matrice symétrique (respectivement antisymétrique) si et seulement si $A = {}^tA$ (respectivement $A = -{}^tA$).

Soit F l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétriques et dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $M = A + D$ où A est une matrice antisymétrique et D est une matrice diagonale.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = (n_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \text{ où } n_{i,j} = \begin{cases} -m_{i,j} & \text{si } i = j \\ m_{j,i} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

3. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. φ est-il diagonalisable ?
5. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ .

6. On se place dans le cas $n = 3$, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'image de M par la projection sur G de direction F .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^*$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. Calculer $f(0)$.
2. (a) Montrer que pour tout réel strictement positif a , $\int_0^a f(y) \, dy \neq 0$.
(b) Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^a f(x+y) \, dy = f(x) \int_0^a f(y) \, dy$$

- (c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. On note $\alpha = f'(0)$.
(a) Donner une relation simple entre f , α et f' .
(b) Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \exp(-\alpha x)f(x)$ est constante. En déduire l'expression de f en fonction de α .
4. Soit X une variable aléatoire admettant une densité nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose de plus que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \mathbb{P}(X > x+y \mid X > x) = \mathbb{P}(X > y)$$

À l'aide des questions précédentes, déterminer la loi de X .

Exercice 2. Dans cet exercice, on pourra admettre le résultat suivant :

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \text{ pour toutes matrices } A, B \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On considère la matrice $K = I_3 + J$ où I_3 désigne la matrice unité et J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

L'objectif de cet exercice est de donner une expression de K^n pour tout entier naturel n .

Partie 1.

1. Pour tout entier naturel non nul n , déterminer une expression de J^n en fonction de J .
2. En déduire une expression de K^n .

Partie 2.

3. Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.

TSVP

4. (a) On suppose que J est diagonalisable.
Quel est le rang de J ?
Que peut-on en déduire sur le spectre de J ?
- (b) Soit $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Sans calculer P^{-1} justifier que P est inversible et que la matrice $D = P^{-1}JP$ est diagonale.
5. Déterminer une matrice Δ diagonale telle que $K = P\Delta P^{-1}$ où P est la matrice introduite dans la question précédente.
6. Retrouver alors l'expression de K^n .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. Soit p un réel de $]0; 1[$, soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p .

On définit alors une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$Y_1 = X_1 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad Y_n = Y_{n-1}X_n$$

On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_{n-1} et X_n sont indépendantes.

1. Soit n un entier naturel non nul, déterminer la loi de Y_n , son espérance et sa variance.
2. Soit n un entier naturel non nul, déterminer la loi du couple (X_n, Y_n) et la covariance des variables X_n et Y_n .

Exercice 2. Soit n un entier naturel non nul. On définit la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$$

1. Démontrer que la série de terme général u_k est convergente.

On note $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la somme de cette série.

Dans la suite on considère les fonctions f_k pour k entier naturel non nul définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(t) = 1 - (1 - e^{-t})^k$$

2. (a) Soit k un entier naturel non nul. Montrer que l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} f_k(t)dt$ est convergente.
- (b) Soit k un entier naturel non nul. Calculer $I_{k+1} - I_k$. En déduire que : $I_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
- (c) Soit m un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que :

$$\int_m^{m+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{m} \leq \int_{m-1}^m \frac{dt}{t}$$

En déduire que un encadrement de I_{n-1} .

3. (a) Soit g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{n-1}$$

Démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k \leq \int_{k-1}^k g_n(x) dx \leq u_{k-1}$$

En déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2, \quad \sum_{k=1}^m u_k \leq \int_0^m g_n(x) dx \leq \sum_{k=0}^{m-1} u_k$$

- (b) Démontrer alors que :

$$S_n - 1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leq S_n$$

(on pourra utiliser le changement de variable $t = x \ln 2$)

Démontrer enfin que : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\ln 2}$

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury interviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordé durant la préparation.

Exercice 1.

1. (a) Expliciter le terme général de la suite (b_n) définie par

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1 \text{ et, pour entier } n \geq 2, \quad b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + b_{n-2})$$

- (b) On considère trois suites (a_n) , (b_n) et (c_n) définies par :

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 1 \text{ et pour tout } n \geq 1, \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{4}b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + c_{n-1} \\ c_n = \frac{1}{4}b_{n-1} \end{cases}$$

Calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n .

2. Une urne A contient au départ deux boules numérotées 1 et une urne B contient deux boules numérotées 0.

On extrait au hasard et simultanément de chacune des deux urnes une boule que l'on remet dans l'autre urne.

Pour tout entier naturel n , on note X_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules dans l'urne A après n expériences du type décrit précédemment.

X_0 est donc la variable certaine égale à 2.

- (a) Déterminer la loi de X_n .

- (b) Justifier que X_n admet une espérance et la calculer.

Exercice 2. Soit la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

1. (a) Montrer que -1 est valeur propre de A . Déterminer une base et la dimension du sous-espace propre $E_{-1}(A)$ associé.
- (b) Déterminer une base de l'orthogonal de $E_{-1}(A)$. Justifier que $(E_{-1}(A))^\perp$ est un sous-espace propre de A .
- (c) f est-il diagonalisable ?
- (d) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $E_{-1}(f)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique réel λ_u tel que :

$$u = \lambda_u \cdot e + u', \quad \text{avec} \quad \langle u', e \rangle = 0$$

TSVP

3. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On précisera en particulier le cas d'égalité.
4. Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^3, \langle u, f(u) \rangle = 0\}$
 - (a) Démontrer que $u \in F \Leftrightarrow |\lambda_u| = \|u'\|$.
 - (b) Soit u et v dans F . Montrer que $u+v$ est un élément de F si et seulement si $\lambda_u \lambda_v = \langle u', v' \rangle$.
En déduire que $u+v$ est un élément de F si et seulement si la famille (u, v) est liée.
 - (c) Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ inclus dans F ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury interviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordé durant la préparation.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie $n \geq 2$ et soit f un endomorphisme de E .

1. Soit $(a_1, \dots, a_k)$ une famille de vecteurs de E tels que la famille $(f(a_1), \dots, f(a_k))$ soit libre. Montrer que $(a_1, \dots, a_k)$ est libre.
2. On suppose dans cette question que $f \circ f$ est l'application nulle. En déduire une relation d'inclusion entre $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
3. On suppose dans cette question que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
 - (a) Justifier que $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$.
 - (b) Dans la suite, on considère $(e_1, \dots, e_k)$, une base de $\text{Ker}(f)$. Justifier l'existence de k vecteurs de E , $a_1, \dots, a_k$, ayant $e_1, \dots, e_k$ pour images respectives par f .
 - (c) Montrer que la famille $(a_1, \dots, a_k, e_1, \dots, e_k)$ est libre.
 - (d) En déduire une base et la dimension de E .

Exercice 2.

1. (a) Démontrer que pour n entier naturel non nul, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$ est convergente.
 Dans la suite, pour n entier naturel non nul, on notera : $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$.
 (b) Démontrer que pour n entier naturel non nul, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
 (c) Calculer $\Gamma(1)$, en déduire une expression de $\Gamma(n)$ en fonction de n (et sans intégrale).
2. Pour λ réel strictement positif et n entier naturel non nul, on définit la fonction $f_{\lambda,n}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{\lambda,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Justifier que $f_{\lambda,n}$ est une densité de probabilité.

Si X est une variable aléatoire de densité $f_{\lambda,n}$, on dit que X suit la loi gamma de paramètres λ et n et on note $X \hookrightarrow \gamma(\lambda, n)$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $]0; 1]$ et un réel strictement positif θ .

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_k = -\frac{1}{\theta} \ln(U_k)$. Montrer que la variable aléatoire X_k est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

TSVP

Dans la suite, on admet que $\sum_{k=1}^n X_k$ suit la loi $\gamma(\theta, n)$.

4. Soit $Z = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}, \prod_{k=1}^{n+1} U_k < e^{-\theta} \right\}$

- (a) Déterminer la probabilité de l'événement $[Z = 0]$.
- (b) Soit n un entier naturel non nul, justifier que :

$$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P} \left(1 < \sum_{k=1}^{n+1} X_k \right) - \mathbb{P} \left(1 < \sum_{k=1}^n X_k \right)$$

- (c) En déduire la loi de Z .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On note D l'ensemble des couples (x, y) de réels vérifiant :

$$x > \frac{1}{4}, \quad y > \frac{1}{4}, \quad x + y < \frac{3}{4}.$$

On admet que les résultats connus pour l'optimisation des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ sont encore valables sur D .

Soit f la fonction définie sur D par :

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy(x + y)}.$$

1. Vérifier que :

$$\forall (x, y) \in D, \quad f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x + y}.$$

2. Justifier que f n'a pas d'extremum sur D .

3. Justifier que pour tout élément (x, y) de D on a :

$$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < x + y < \frac{3}{4}.$$

En déduire que f est majorée sur D .

4. Démontrer que f est minorée par 2 sur D .

Exercice 2.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes :

(P1) f n'est pas bijectif.

(P2) f admet n valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ telles que $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_n|$.

(P3) Pour tous entiers i et j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, si $i \neq j$, alors $E_{\lambda_j} \subset (E_{\lambda_i})^\perp$.

1. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice diagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 0 & & (0) & \\ & & 1 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & n-2 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme g vérifie-t-il les propriétés (P1), (P2) et (P3) ?

TSVP

2. Montrer que $\lambda_1 = 0$.
3. Montrer que $\text{Im}(f)$ est l'orthogonal de $\text{Ker}(f)$.

Pour tout entier i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note p_i le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i .

On note p le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(f)$.

4. (a) Montrer que, pour tout couple d'entiers (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $i \neq j$, alors $p_i \circ p_j$ est l'endomorphisme nul.
- (b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ de $E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_n}$ vérifiant :

$$x = x_1 + \dots + x_n$$

- (c) En déduire que pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i(x) = x_i$.
- (d) Montrer que $f = \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_n p_n$.

On admet dans la suite qu'on démontrerait de même que $p = p_2 + \dots + p_n$.

On note $\tilde{f}$ l'endomorphisme de E défini par :

$$\tilde{f} = \frac{1}{\lambda_2} p_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n} p_n$$

5. Montrer que $f \circ \tilde{f} = p$.
6. Montrer que pour tout vecteur z de $\mathbb{R}^n$,

$$d(z, \text{Im}(f)) = \|f(x) - z\| \iff x - \tilde{f}(z) \in \text{Ker}(f)$$

où $d(z, \text{Im}(f))$ désigne la distance de z au sous-espace vectoriel $\text{Im}(f)$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

- Justifier que pour x réel strictement positif l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt$ est convergente.
Que pouvez-vous dire dans le cas où $x \leq 0$?

On définit alors la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2} dt.$$

- Montrer que la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - Déterminer la limite de φ en $+\infty$.

- Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du$$

- En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer φ' .
 - Retrouver alors le résultat de la question 2.(a).

- Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{2}{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^3} dt$$

- En déduire un équivalent simple de $\varphi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On désigne par $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Soit φ l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$, associe le polynôme :

$$x \mapsto (x^2 - 1)P'(x) - axP(x)$$

où a désigne une constante réelle.

- Déterminer la constante a pour que l'image de $\mathbb{R}_n[x]$ par φ soit incluse dans $\mathbb{R}_n[x]$.

Dans la suite, a est supposé être égal à cette valeur et on note ψ l'application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$ qui à P associe $\varphi(P)$.

- Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

TSVP

3. Soit k un entier naturel tel que $2k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On définit alors les polynômes P_k et Q_k par :

$$P_k : x \mapsto (x^2 - 1)^k (x + 1)^{n-2k} \quad \text{et} \quad Q_k : x \mapsto (x^2 - 1)^k (x - 1)^{n-2k}$$

Calculer $\psi(P_k)$ et $\psi(Q_k)$.

4. (a) ψ est-il diagonalisable ?

(b) ψ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$?

5. On note d l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{R}_n[x]$ et pour tout entier naturel non nul p , on note ψ^p l'endomorphisme $\psi \circ \psi \dots \psi$ (p fois).

Peut-on trouver un entier p de $\mathbb{N}^*$ tel que $\psi^p = d$?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury interviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordé durant la préparation.

Exercice 1.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

On considère u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On définit alors u^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est tA , la transposée de la matrice A .

1. Montrer que, $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle$.
2. Montrer que $\text{Im}(u) \subset (\text{Ker}(u^*))^\perp$.
3. Montrer que $(\text{Im}(u))^\perp \subset \text{Ker}(u^*)$.
4. En déduire que $\text{Im}(u) = (\text{Ker}(u^*))^\perp$.

Exercice 2.

1. Soit f la fonction définie sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}], \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$$

- (a) Justifier que f est prolongeable en une fonction continue et dérivable à droite en 0.
On pourra remarquer pour cela que :

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}], \quad f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^2} \times \frac{x}{\sin(x)}$$

- (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; \frac{\pi}{2}]$. On admet qu'elle est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

2. Soit φ une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
Démontrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(t) \sin(xt) dt = 0.$$

(on pourra commencer par une intégration par parties)

3. (a) Soit n un entier naturel, justifier que les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt$ sont convergentes.
- (b) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt$

4. On note, pour n entier naturel, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n , $I_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.

On rappelle que pour tous réels p et q , $\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n - I_{n-1} = 0$.

(c) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

5. Soit a est un réel strictement positif. Déterminer la limite de $\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t} dt$ quand n tend vers $+\infty$. On pourra distinguer 3 cas : $a = \frac{\pi}{2}$, $a < \frac{\pi}{2}$ et $a > \frac{\pi}{2}$

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1. On considère une urne contenant des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes en proportions respectives b, r, v avec $b + r + v = 1$.

On effectue alors des tirages successifs avec remise d'une boule dans cette urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche, Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge et D la variable aléatoire $|X - Y|$.

1. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
3. Déterminer la loi de D .

Exercice 2.

1. (a) Justifier que pour tout x de $]0, \pi]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2 \cos(kx) = e^{ikx} + e^{-ikx}$.
 (b) En déduire que pour tout x de $]0, \pi]$ et tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx$ existe et calculer sa valeur.
3. On note f l'application définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0, \pi] \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et calculer $f'(0)$.
- (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $J_n = \int_0^\pi f(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$.
 Montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
 On pourra effectuer une intégration par parties.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $u_n = 2 \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx) dx$.

- (a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n u_k = -2 + I_n + J_n$$

- (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.