

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

1. Question préliminaire :

Montrer que si φ est une fonction paire, continue sur $\mathbb{R}$ et si $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$ converge, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

On considère une variable aléatoire X qui suit la normale centrée réduite.

On pose $Y = |X|$.

2. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

3. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, Y admet un moment d'ordre n et que :

$$E(Y^n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$$

Dans toute la suite, on note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2} dx$

4. (a) Justifier que I_0 converge et calculer sa valeur.
 (b) Calculer I_1 .
 (c) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
 (d) En déduire, pour tout k dans $\mathbb{N}$, la valeur de I_{2k+1} et celle de I_{2k} en fonction de k .
5. (a) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-nx^2/2} dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-nx^2/2} dx$$

(b) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$n^{-\frac{n+2}{2}} I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}} I_n = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-nx^2/2} (x-1)^2 dx$$

(c) En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \sqrt{n} I_n \leq I_{n+1}$$

6. (a) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, déterminer l'expression de $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ en fonction de n .

(b) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \leq \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} \binom{2n}{n} \leq 1$$

et en déduire un équivalent de $\binom{2n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

1. Montrer que l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}^* \mid \text{Ker}(u^j) = \text{Ker}(u^{j+1})\}$ est non vide et qu'il est minoré.
On admettra qu'il possède par conséquent un plus petit élément.

Dans la suite de l'exercice, on pose :

$$\begin{aligned} k &= \min\{j \in \mathbb{N}^* \mid \text{Ker}(u^j) = \text{Ker}(u^{j+1})\}, \\ K &= \text{Ker}(u^k), \\ I &= \text{Im}(u^k). \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout $j \geq k$, $\text{Ker}(u^j) = K$ et $\text{Im}(u^j) = I$.
3. Montrer que l'application u_K définie par :

$$\forall x \in K, u_K(x) = u(x)$$

est un endomorphisme de K et qu'il existe un entier naturel p tel que u_K^p est l'endomorphisme nul.

4. Montrer que l'application u_I définie par :

$$\forall x \in I, u_I(x) = u(x)$$

est un automorphisme de I .

5. Montrer que K et I sont des sous-espaces supplémentaires dans E .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

1. Résultats préliminaires

- (a) Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit a un réel.
Montrer que si $\int_a^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge alors $\int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
- (b) Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et a un réel.
Montrer que si $\int_a^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge alors la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \varphi(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$ de dérivée $x \mapsto -\varphi(x)$.
- (c) Soit φ une fonction continue et paire sur $\mathbb{R}$.
Montrer que si $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$.

Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F . On suppose que :

$$\forall x < 0, f(x) = 0 \text{ et } f \text{ continue sur } [0; +\infty[.$$

2. On suppose pour cette question que la variable X admet une espérance.

- (a) Montrer que pour $x > 0$:

$$0 \leq x \int_x^{+\infty} f(t)dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t)dt$$

En déduire que :

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- (b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} f(t)dt \right) dx$ converge et vaut $E(X)$.
- (c) Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx$ converge et calculer sa valeur.

3. Réciproquement, on suppose désormais que $\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} f(t)dt \right) dx$ converge.

- (a) Soit a un réel positif, démontrer que :

$$0 \leq \int_0^a xf(x)dx \leq \int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx$$

- (b) En déduire que X a une espérance.

Exercice 2.

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathcal{C}$ et de son produit scalaire canonique.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles qu'il existe un couple de réels (a, b) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = ax_n + b.$$

On considère deux suites réelles u et v définies par leurs premiers termes respectifs u_0 et v_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n + 2 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}v_n + 1.$$

1. Soit (α, β) un couple de réels et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \alpha u_n + \beta v_n$.
Montrer que, pour que la suite w soit un élément de $\mathcal{E}$, il suffit que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

2. (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (C_1, C_2)$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propre pour M .
(b) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ puis la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
3. On considère les suites $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{pmatrix} z_n \\ t_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Exprimer z_n et t_n en fonction de n , u_0 et v_0 .

4. Déterminer finalement une expression de u_n et de v_n en fonction de n , u_0 et v_0 .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'équation :

$$(E_n) \quad 1 + \ln(x + n) = x$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution a_n sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que, pour n assez grand, $\ln(n) \leq a_n \leq n$.
En déduire le comportement de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que $a_n \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
(b) Déterminer un équivalent simple de e^{a_n} lorsque n tend vers $+\infty$.
4. (a) Montrer que la suite $(a_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite ℓ .
(b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (a_n - \ln(n) - \ell)$?

Exercice 2.

On admet que si x est un réel de $] -1; 1[$, alors :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce qui donne "pile" avec probabilité p (on suppose que $p \in]0; 1[$).

Un compteur affiche à l'issue de chaque lancer la différence entre le nombre de "pile" et le nombre de "face" obtenus depuis le premier lancer. Ainsi, si les premiers lancers donnent "PFFPP", le compteur affichera 1 à l'issue de ces lancers. Si les premiers lancers donnent "FPFFF", le compteur affichera -3 à l'issue de ces lancers.

Un entier naturel non nul n étant fixé, on note C_n la variable aléatoire égale à l'entier relatif affiché par le compteur à l'issue du n -ième lancer.

1. Déterminer $P([C_n = 0])$. On pourra distinguer deux cas selon la parité de n .

Pour tout entier naturel non nul k , on note A_k l'événement "le compteur affiche 0 pour la première fois à l'issue du k -ième lancer".

2. (a) Justifier que : $[C_n = 0] \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$.

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(C_n = 0) = \sum_{k=1}^n P([C_n = 0] \cap A_k)$$

3. (a) Justifier que, pour tous entiers naturels k et n : $P_{A_k}(C_n = 0) = \begin{cases} P(C_{n-k} = 0) & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(C_n = 0) = \sum_{k=1}^n P(C_{n-k} = 0) \times P(A_k)$$

(c) On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1, v_0 = 0 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = P(C_n = 0) \text{ et } v_n = P(A_n)$$

- i. Montrer que si $x \in]-1, 1[$, la série de terme général $v_n x^n$ converge. On note $V(x)$ sa somme.
- ii. Montrer en utilisant le résultat admis au début de l'énoncé que pour tout $x \in]-1; 1[$, la série de terme général $u_n x^n$ converge et que si on note $U(x)$ sa somme, on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, U(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4p(1-p)x^2}}$$

- iii. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^n u_{n-k} v_k$$

- iv. En déduire que pour tout x de $] - 1; 1[$,

$$U(x) = 1 + U(x)V(x)$$

- v. Donner, en fonction de p et de x , une expression de $V(x)$ sur $] - 1; 1[$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Justifier que la suite (R_n) est décroissante, convergente et déterminer sa limite.
2. Pour n entier naturel, justifier que :

$$\sum_{k=0}^n R_k = (n+1)R_n + \sum_{k=0}^n k u_k.$$

En déduire que si la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} n u_n$ converge.

3. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} n u_n$ converge.

(a) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)R_n$?

(b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} R_n$ converge.

4. Application : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note F sa fonction de répartition.

(a) Justifier que X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - F(n))$ est convergente et que, si elle existe, l'espérance de X est la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 - F(n))$.

(b) En déduire une démonstration pour la formule de l'espérance d'une loi géométrique.

Exercice 2.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

Les matrices considérées sont à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des réels ou l'ensemble des complexes.

Pour M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note ${}^t M$ la transposée de la matrice M .

1. Question préliminaire

Montrer qu'une matrice carrée a les mêmes valeurs propres que sa transposée.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres distinctes notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

On appelle alors D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i avec i entier entre 1 et n .

2. Rappeler pourquoi A est diagonalisable et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.

3. Soit P une matrice inversible.

Montrer que l'égalité $AP = PD$ équivaut au fait que pour chaque entier j entre 1 et n , la j -ème colonne de P est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_j .

4. Dans toute la suite, on note P une matrice dont la j -ème colonne est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_j pour chaque entier j entre 1 et n . La matrice Q jouera le même rôle avec les mêmes valeurs propres de tA . Pour i et j deux entiers entre 1 et n , on notera respectivement p_{ij} et q_{ij} le coefficient se trouvant à la ligne i et la colonne j dans la matrice P et la matrice Q .

- (a) Justifier que : ${}^tQA = D{}^tQ$.

En déduire que : $A({}^tQ)^{-1} = ({}^tQ)^{-1}D$.

- (b) Justifier alors l'existence d'une matrice diagonale inversible Δ qui vérifie :

$$({}^tQ)^{-1} = P\Delta.$$

- (c) On note $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ les coefficients diagonaux de Δ . Montrer qu'ils sont déterminés par la relation :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \delta_i \sum_{k=1}^n p_{ki} q_{ki} = 1$$

5. Application : Montrer que si les valeurs propres de A sont toutes non nulles, alors A est inversible et pour tous les entiers i et j entre 1 et n , le terme qui se situe à la i -ème ligne et j -ème colonne de A^{-1} est égal à $\sum_{k=1}^n \delta_k \frac{p_{ik} q_{jk}}{\lambda_k}$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et qui suivent toutes la loi uniforme discrète sur $\{-1; 1\}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. (a) Pour un réel t et un entier k donnés, montrer que la variable e^{tX_k} admet une espérance et la calculer.
Dans la suite, on note $\varphi(t) = E(e^{tX_k})$.

- (b) Montrer que pour tout réel t , $\varphi(t) \leq e^{t^2/2}$.

Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2} - \ln(\varphi(t))$

2. (a) Pour tout réel t , montrer que $E(e^{tS_n}) = (\varphi(t))^n$.

- (b) Pour tout réel t , déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(e^{tS_n/\sqrt{n}})$$

3. Soit a un réel positif.

- (a) Montrer que, pour tout réel positif t :

$$P(S_n \geq a) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{e^{ta}}$$

- (b) À l'aide des questions précédentes, en déduire que :

$$P(S_n \geq a) \leq e^{-a^2/2n}$$

- (c) Montrer que $P(S_n \leq -a) = P(S_n \geq a)$ puis déterminer une majoration de $P(|S_n| \geq a)$.

Exercice 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme associée est notée $\| \cdot \|$.

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme égale à 1.

Pour tout réel a , on définit l'application f_a par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f_a(x) = x + a\langle x, u \rangle u$$

1. Montrer que f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

2. Soient a et b deux réels.

- (a) Déterminer c tel que $f_a \circ f_b = f_c$

- (b) Pour quelle(s) valeur(s) de a , l'application f_a est-elle bijective ? Expliciter alors sa bijection réciproque.

- (c) Pour quelle(s) valeur(s) de a , l'application f_a est-elle une symétrie ? Préciser alors son axe et sa direction.
- (d) Pour quelle(s) valeur(s) de a , l'application f_a est-elle une projection ? Préciser alors les deux sous-espaces F et G tels que f_a soit une projection sur F de direction G .
3. L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?
4. Dans cette question, on pose $a = -2$ et on ne suppose plus le vecteur u fixé.
On note s_u l'application f_{-2} définie précédemment. On a donc, pour tout u de $\mathbb{R}^n$ tel que $\|u\| = 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, s_u(x) = x - 2\langle x, u \rangle u$$

On note g un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété suivante : la matrice de g^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la transposée de la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- (a) Vérifier que $\|g(u)\| = 1$.
- (b) Montrer que : $g \circ s_u \circ g^{-1} = s_{g(u)}$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ de densité f et de fonction de répartition F , on appelle taux de défaillance de X la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{1 - F(x)} & \text{si } F(x) < 1 \\ 0 & \text{si } F(x) = 1 \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question uniquement que X suit la loi uniforme sur $]a, b[$ où a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$. Déterminer le taux de défaillance de X .
2. On suppose dans cette question uniquement que X suit la loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif. Déterminer le taux de défaillance de X .
3. On revient au cas général. On considère un réel t vérifiant $F(t) < 1$.
Exprimer $\int_0^t h(x) dx$ en fonction de $F(t)$.
4. Déterminer les lois pour lesquelles le taux de défaillance est constant.

Exercice 2.

Dans cet exercice on se place dans un espace vectoriel E de dimension finie n où n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère alors u et v deux endomorphismes de E diagonalisables.

1. Démontrer que s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices associées à u et v sont diagonales, alors on a $u \circ v = v \circ u$ (on dit que u et v commutent).
2. Supposons désormais que $u \circ v = v \circ u$.
 - (a) Dans cette question on se place dans le cas particulier $n = 2$.
Justifier qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices associées à u et à v sont diagonales (on pourra procéder par disjonction de cas en fonction du nombre de valeurs propres distinctes de u).
 - (b) On revient au cas général où n est un entier naturel non nul.
 - i. Démontrer que si u possède une seule valeur propre alors il existe une base de E dans laquelle les matrices associées à u et à v sont diagonales.
 - ii. Soit F un sous-espace propre de u .
Montrer que : $\forall x \in F, v(x) \in F$.
On considère alors $\tilde{v}$ l'endomorphisme de F induit par v : $\tilde{v}$ est donc l'endomorphisme de F tel que pour tout $x \in F$, $\tilde{v}(x) = v(x)$.
On définit de même $\tilde{u}$ l'endomorphisme de F induit par u .
Justifier que $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ commutent.
 - iii. À l'aide d'une démonstration par récurrence, démontrer alors que, si u et v commutent, il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et de v sont diagonales.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on appelle Y_n la variable aléatoire définie par : $Y_n = (\sin(X))^{2n}$.

1. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, Y_n admet une espérance que l'on notera J_n .
- (b) Calculer J_0 .

La suite de cet exercice a pour objectif de déterminer de deux façons différentes la limite de la suite $(E(Y_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Première méthode.

- (a) i. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que :

$$J_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} J_{n-1}$$

- ii. Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. En déduire que cette suite est convergente.

- (b) i. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln \left(\frac{2k(2k-1)}{4k^2+1} \right)$.
- ii. En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Seconde méthode.

- (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int_0^\pi (\sin(x))^{2n} dx$$

- (b) Retrouver ainsi la limite de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Y_n > \varepsilon) = 0$$

Exercice 2.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. **Question préliminaire**

Montrer qu'une matrice carrée a les mêmes valeurs propres que sa transposée.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $r_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

Soient λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

(a) Montrer que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda x_i| \leq r_i \times \max_{1 \leq k \leq n} (|x_k|)$$

(b) En déduire qu'il existe i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda| \leq r_i$.

3. Soit $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ dans $\mathbb{C}^n$.

On définit le polynôme P par : $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$ et la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ -c_{j-1} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que les valeurs propres de M sont les racines du polynôme P .

(b) On pose $R = \max(|c_0|, 1 + |c_1|, 1 + |c_2|, \dots, 1 + |c_{n-1}|)$.

Déduire des questions précédentes que toutes les racines de P ont un module inférieur ou égal à R .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit f et g deux projecteurs de E . On note id_E l'application identité de E .

Les questions 2. et 3. sont indépendantes l'une de l'autre.

1. (a) Démontrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires dans E .
(b) Démontrer que $\text{Im } f = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.
2. (a) Démontrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ si et seulement si $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.
(b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f et g aient la même image.
3. On suppose dans cette question que $f \circ g = g \circ f$.
(a) Démontrer que $f \circ g$ est un projecteur.
(b) Démontrer que :

$$E = (\text{Im } f \cap \text{Im } g) \oplus (\text{Im } f \cap \text{Ker } g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Im } g) \oplus (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g)$$

En déduire l'image et la direction de $f \circ g$.

Exercice 2.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé.

On considère T une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0; 1[$ et on définit alors la variable U par la relation $U = 1 - T$.

On pose alors : $X = \min(T, U)$, $Y = \max(T, U)$, $M = XY$ et $S = Y - X$.

1. Rappeler la fonction de répartition F_T de T . On en donnera une expression et l'allure de la représentation graphique.
Rappeler les valeurs respectives de l'espérance et de la variance de T .
2. Déterminer la fonction de répartition de U .
3. (a) Donner une expression de M en fonction de T uniquement.
(b) En déduire que M admet une espérance et donner sa valeur.
(c) Donner la représentation graphique de la fonction $t \mapsto t(1 - t)$ pour $t \in [0; 1]$.
(d) Montrer alors que la fonction de répartition F_M de M vérifie :

$$\forall x \in]0; 1/4[, \quad F_M(x) = 1 - \sqrt{1 - 4x}$$

- (e) M admet-elle une variance ? Si oui, donner sa valeur. (On pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{1 - 4x}$).
4. (a) Justifier que $S = |2T - 1|$.
(b) Déterminer alors la probabilité de l'événement $[M > S]$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Soit f un endomorphisme de E_1 et g un isomorphisme de E_1 sur E_2 .

À tout vecteur x de E que l'on peut écrire $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, on associe :

$$\varphi(x) = g^{-1}(x_2) + g(x_1) + f(x_1)$$

1. Justifier que $\dim E_1 = \dim E_2$. Que peut-on en déduire sur n ?
2. Montrer que φ est un automorphisme de E .
3. (a) On suppose que φ admet une valeur propre réelle λ et on note x un vecteur propre associé. On écrit de nouveau x sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Montrer qu'alors x_1 et x_2 sont non nuls et que x_1 est un vecteur propre de f .
(b) Réciproquement, on suppose que f admet une valeur propre réelle μ et on note x_1 un vecteur propre associé. Montrer que φ admet au moins deux valeurs propres réelles λ et λ' et déterminer en fonction de x_1 un vecteur propre de φ associé à chacune de ces deux valeurs propres.

Exercice 2.

Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes entre elles. Elles utilisent le résultat démontré dans la question 1.

Dans la suite, on admettra le résultat suivant :

Si $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est une suite de réels positifs ou nuls, suite à deux indices vérifiant :

(i) pour tout k de $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,k}$ converge. On note S_k sa somme.

(ii) la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} S_k$ converge.

Alors on peut permuter les deux signes $\sum$ et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} S_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} \right)$$

1. Soient X et N des variables aléatoires discrètes et à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même univers Ω que l'on supposera muni d'une probabilité P .
On convient de noter $N(\Omega)$ l'ensemble des entiers n de $\mathbb{N}$ tels que $P(N = n) \neq 0$.
On admet que X possède une espérance.

(a) Montrer que pour tout n de $N(\Omega)$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} kP(X = k | N = n)$ est convergente. On notera $E_n(X)$ sa somme.

(b) Montrer que :

$$E(X) = \sum_{n \in N(\Omega)} E_n(X)P(N = n)$$

2. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce qui donne "pile" avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et "face" avec la probabilité $1 - p$.

On appelle N la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir "pile" pour la première fois.

Si "pile" apparaît pour la première fois au n -ième tirage, on effectue n lancers de la même pièce et on appelle X le nombre de "pile" obtenus lors de cette seconde série de lancers.

On admet que X possède une espérance. La déterminer.

3. Un joueur paie une certaine somme r pour pouvoir jouer à un jeu qui consiste à lancer plusieurs fois un dé :

- s'il obtient un 6, l'organisateur du jeu lui donne 6 euros et le jeu continue,
- s'il obtient un 5, l'organisateur du jeu lui donne 5 euros et le jeu continue,
- s'il obtient un chiffre différent de 5 et 6, il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

On note N le nombre de lancers effectués avant d'obtenir un chiffre différent de 5 et 6 et S la somme gagnée.

On admet que S possède une espérance.

(a) Déterminer la loi de N . Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

(b) Montrer que pour tous n et k de $\mathbb{N}$,

$$P_{[N=n]}(S = k) = \begin{cases} \frac{\binom{n}{6n-k}}{2^n} & \text{si } 5n \leq k \leq 6n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) Quelle doit être la valeur de r pour qu'en moyenne l'organisateur du jeu ne soit pas perdant ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On dispose d'une infinité de sacs numérotés par les entiers naturels de sorte que pour chaque entier naturel i , le sac numéroté i contient $i + 1$ jetons eux-mêmes numérotés de 0 à i .

On choisit un sac puis on pioche au hasard un jeton dans le sac (ce tirage se fait dans des conditions d'équiprobabilité).

On note Ω l'univers de cette expérience.

On note N la variable aléatoire égale au numéro du sac choisi et, pour chaque entier naturel i , on note p_i la probabilité de l'événement $[N = i]$.

On note X la variable aléatoire égale au numéro du jeton obtenu.

- Quel est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs possibles pour X ?
 - Pour chaque valeur j dans $X(\Omega)$, donner une expression de $P(X = j)$ sous la forme d'une somme faisant intervenir les p_i .
 - Montrer que $N - X$ suit la même loi que X .
- On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel n supérieur ou égal à 2 qui vérifie :

$$\forall i \geq n + 1, \quad p_i = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \leq n, \quad p_i > 0.$$

- Trouver une relation entre $E(N)$ et $E(X)$.
- Trouver une relation entre $V(N)$ et $\text{Cov}(N, X)$.
(On pourra utiliser l'égalité : $V(N - X) = V(N) + V(X) - 2\text{Cov}(N, X)$.)
- Calculer $\text{Cov}(N, N - 2X)$. Les variables N et $N - 2X$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère a un réel fixé pour l'ensemble de l'exercice. On définit l'application Φ qui, à toute fonction f élément de E , associe la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-a} \int_x^{2x-a} f(t) dt & \text{si } x \neq a \\ f(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

- Soit f un élément de E .
Justifier que $\Phi(f)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
En déduire que Φ est un endomorphisme de E .
- Soit f un élément de E , justifier que $\Phi(f)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
- Soit f un élément du noyau de Φ .
 - Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2f(2x - a)$.
 - En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{(2^n - 1)a + x}{2^n}\right) = 2^n f(x)$.
 - Montrer enfin que f est la fonction nulle.

4. Φ est-il surjectif ? injectif ?

5. (a) Pour k entier naturel, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x - a)^k$$

Déterminer l'image par Φ de chaque fonction f_k .

(b) En déduire que l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = \Phi(P)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) φ est-il surjectif ? injectif ? diagonalisable ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que si tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ est vecteur propre de u , alors u admet une seule valeur propre.

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^n$ dont la trace est nulle.

Sous ces conditions, on peut alors démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u a une diagonale constituée de coefficients nuls.

L'objet des questions qui suivent est de montrer ce résultat dans certains cas particuliers.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où a désigne un réel.

3. On suppose dans cette question que $n = 3$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A définie par :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ -4 & 1 & -4 \\ -4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

On appelle x le vecteur $(1, 1, 0)$.

Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est x et dans laquelle la matrice de f est la matrice B définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et l'unicité d'un minimum pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (a, b) \mapsto E((X - aY - bZ)^2)$$

où X, Y, Z désignent trois variables aléatoires à densité admettant des moments d'ordre 2.

1. Dans cette question et la suivante, on suppose que $E(Y^2)E(Z^2) - (E(YZ))^2 \neq 0$.

(a) Montrer que $E(Y^2)$ est non nulle.

(b) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $E((aY + bZ)^2)$ est un réel strictement positif.

2. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'il existe un unique couple $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ (que l'on ne cherchera pas à déterminer) tel que $\frac{\partial f}{\partial a}(a_0, b_0) = \frac{\partial f}{\partial b}(a_0, b_0) = 0$ où $\frac{\partial f}{\partial a}$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable.

- (b) Montrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, E((X - a_0Y - b_0Z)(aY + bZ)) = 0$$

puis que

$$E((X - aY - bZ)^2) = E((X - a_0Y - b_0Z)^2) + E(((a_0 - a)Y + (b_0 - b)Z)^2)$$

- (c) Étudier les extremums de f .

3. On suppose ici que Y et Z sont deux variables aléatoires à densité, indépendantes, qui suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$ et on pose $X = Y^2$.
Déterminer le couple (a_0, b_0) en lequel f admet son minimum.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soit T l'application qui, à tout élément P de E associe la fonction Q définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = xP(x) - \frac{1}{n}(x^2 - 1)P'(x).$$

1. Justifier que T est un endomorphisme de E .
2. Soit P un élément de E , vecteur propre de T .
 - (a) Montrer que P est de degré n .
 - (b) Démontrer que les seules racines possibles pour P sont -1 et 1 .
 - (c) En déduire que P est de la forme : $x \mapsto a(x-1)^k(x+1)^{n-k}$ où a est un réel non nul et k un entier entre 0 et n .
3. Déterminer les valeurs propres de T . L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Exercice 2.

Soit n un entier naturel non nul. On considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1 .

On définit alors la variable Y_n par : $Y_n = \text{Max}(X_1, \dots, X_n)$.

1. (a) Justifier que, pour x réel positif, $P(Y_n \leq x) = (1 - e^{-x})^n$.
- (b) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité (on la notera f_n dans la suite).
2. (a) Démontrer que Y_n a une espérance et démontrer que :

$$E(Y_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j \binom{n}{j+1}}{j+1}$$

- (b) Vérifier que, pour j et k deux entiers entre 1 et $n-1$ vérifiant $j \leq k-1$, on a :

$$k \binom{k}{j} = j \binom{k}{j} + k \binom{k-1}{j}$$

- (c) Pour k entier naturel non nul, on pose : $u_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \binom{k}{j+1}}{j+1}$.

Démontrer que pour k supérieur à 2 , on a : $u_k = u_{k-1} + \frac{1}{k}$.

En déduire que $E(Y_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

3. (a) Pour k entier naturel non nul, on pose : $v_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \binom{k}{j+1}}{(j+1)^2}$.

Démontrer que pour k supérieur à 2, on a : $v_k - v_{k-1} = \frac{1}{k} u_k$.

- (b) Montrer que Y_n a un moment d'ordre 2 et que $E(Y_n^2) = 2v_n$.

- (c) Montrer enfin que Y_n a une variance et que $V(Y_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

On pourra remarquer que : pour $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{i=1}^n a_i^2$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On rappelle que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = {}^tXY$$

où X et Y sont les colonnes contenant les coordonnées respectives de x et de y dans la base canonique de E .

Soit f un endomorphisme de E , on note M sa matrice dans la base canonique de E .

On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique de E est tM .

1. (a) Montrer que $\text{Ker}(f^* \circ f) = \text{Ker}(f)$.
 (b) Montrer que $\text{Im}(f^* \circ f) = (\text{Ker}(f))^\perp$.
 (c) Démontrer alors que si $f \circ f^* \circ f = f$ alors $f^* \circ f$ est une projection orthogonale.
2. (a) Démontrer que $\text{Im}(f) = (\text{Ker}(f^*))^\perp$.
 (b) En déduire que si $f^* \circ f$ est une projection orthogonale, alors $f \circ f^* \circ f = f$.

Exercice 2.

1. Préliminaire

- (a) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = x \ln(x), \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad h(0) = 0$$

Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- (b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(x) \leq x - 1$. Illustrer cette propriété par un graphique.

Pour X une variable aléatoire à densité de densité φ , on dit que X possède une entropie lorsque $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(x))dx$ est absolument convergente. On appelle alors entropie de X la quantité $H(X)$ définie par : $H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(x))dx$.

2. On considère dans cette question une variable X suivant la loi normale d'espérance m et de variance σ^2 ($m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$).

Montrer que X possède une entropie et que $H(X) = \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}$.

On rappelle qu'une densité de X est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.

3. Soit Y une variable aléatoire à densité, de densité f continue sur $\mathbb{R}$, d'espérance m et de variance σ^2 . On suppose de plus que Y admet une entropie.

- (a) Calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(\varphi(x))dx$ et vérifier que $H(X) = -I$.

(b) En utilisant la première question de l'exercice, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -h(f(x)) + f(x) \ln(\varphi(x)) \leq \varphi(x) - f(x).$$

(c) En déduire que $H(Y) \leq H(X)$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$$

et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Représenter graphiquement la fonction f et les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prenant $u_0 \in]1; 2[$.

On pourra tracer la droite (D) d'équation $y = x$ et préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à (D) .

2. On note f_1 la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$.

(a) Montrer que f_1 définit une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

(b) Donner une expression de g , la bijection réciproque de f_1 .

3. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = g(v_n).$$

Étudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

4. Montrer que l'étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se ramène au cas où $u_0 \in [0; 1]$.

5. En discutant selon les valeurs de u_0 , déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2.

Soient X , Y , et Z trois variables aléatoires, indépendantes et qui suivent toutes la loi binomiale de paramètres n et p .

On définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} X & Y & Z \\ X & Y & Z \\ X & Y & Z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le rang de A est inférieur ou égal à 1.

2. (a) Donner une expression de A^2 en fonction de A .

(b) Quelle est la probabilité que A soit la matrice d'un projecteur ?

(c) Quelle est probabilité qu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$?

3. On note T la variable aléatoire égale au nombre de valeurs propres de A .

(a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance et T .

(b) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

4. On suppose dans cette question que $p = 1/2$.

On pourra admettre les propriétés suivantes :

- si B , C et D sont des événements,

$$P(B \cup C \cup D) = P(B) + P(C) + P(D) - P(B \cap C) - P(C \cap D) - P(B \cap D) + P(B \cap C \cap D).$$

- Pour tous entiers naturels m , n_1 et n_2 tels que $m \leq n_1 + n_2$,

$$\sum_{k=0}^m \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{m-k} = \binom{n_1 + n_2}{m}$$

Quelle est la probabilité qu'au moins une des colonnes de A soit égale à la somme des deux autres colonnes ?