

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes. L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements. Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

On considère la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = u_1 = \frac{3}{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_{n+1}u_n}.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et que tous ses termes sont supérieurs ou égaux à  $\frac{3}{2}$ .
2. (a) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et préciser son sens de variation.  
(b) Que peut-on en déduire sur sa limite éventuelle ?
3. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n \leq 1$ .
4. Montrer que quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $u_{n+1} \sim u_n$ .

### Exercice 2.

Soit  $u$  un endomorphisme non nul de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $u^2$  est l'endomorphisme nul.

1. Montrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $u$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ , on dit que  $F$  est stable par  $u$  si et seulement si :

$$\forall x \in F, u(x) \in F.$$

L'objectif de cette question est de déterminer les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  stables par  $u$ .

- (a) Justifier que  $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$  et  $\mathbb{R}^3$  sont stables par  $u$ .
- (b) Déterminer les sous-espaces de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 1 qui sont stables par  $u$ .
- (c) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 2 et stable par  $u$ . On suppose dans cette question que  $F$  est différent de  $\ker(u)$ .
  - i. Montrer qu'il existe un vecteur non nul  $a$  appartenant à  $F$  et à  $\ker(u)$ .
  - ii. Montrer qu'il existe un vecteur non nul  $b$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $u(b) = a$  et  $F = \text{Vect}(a, b)$ .
- (d) Déterminer les sous-espaces de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 2 qui sont stables par  $u$ .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

Soit  $n \geq 1$  un entier naturel, on pose  $E = \mathbb{R}^n$ . On considère  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$ .

1. Montrer que  $\text{Im}(u \circ v) = u(\text{Im } v)$ .
2. On considère  $u' : \text{Im } v \rightarrow E$  la restriction de  $u$  à  $\text{Im } v$ .
  - (a) Montrer que  $\text{Im } u' = \text{Im}(u \circ v)$  et  $\ker u' = \ker u \cap \text{Im } v$ .
  - (b) Montrer que  $\text{rg}(u \circ v) \leq \text{rg}(v)$ .
3. Montrer que :

$$\text{rg}(u) + \text{rg}(v) - n \leq \text{rg}(u \circ v) \leq \min\{\text{rg}(u), \text{rg}(v)\}.$$

### Exercice 2.

Si  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et si  $x_1, \dots, x_n$  est une liste de réels, pour tout entier  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on note  $s_k(x_1, \dots, x_n)$  le  $k$ -ième élément de la liste lorsqu'on range  $x_1, \dots, x_n$  par ordre croissant. Ainsi,  $s_1(x_1, \dots, x_n)$  est le plus petit élément de la liste et  $s_n(x_1, \dots, x_n)$  est le plus grand élément de la liste.

On considère  $n$  variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  qui suivent toutes la même loi.

Pour tout entier  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on note  $Y_k$  la variable aléatoire égale à  $s_k(X_1, \dots, X_n)$ .

1. Soit  $k$  un entier de  $\{1, \dots, n\}$  et  $x$  un réel. Montrer que :

$$P(Y_k \leq x) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} (P(X_1 \leq x))^i (P(X_1 > x))^{n-i}$$

2. Montrer que la fonction  $F$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On suppose dans la suite de cet exercice que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  ont toutes pour fonction de répartition la fonction  $F$  définie précédemment.

3. Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  admettent-elles une espérance ?
4. Soit  $k$  un entier de  $\{1, \dots, n\}$ . On admet que  $Y_k$  est une variable à densité. Vérifier qu'une densité de  $Y_k$  est la fonction  $h_k$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_k(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} \binom{n-1}{k-1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k+3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et en déduire un équivalent de  $h_k(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

5. On suppose dans cette question que  $n \geq 3$  et que  $k \in \{1, \dots, n-2\}$ . Montrer que  $Y_k$  admet une espérance.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

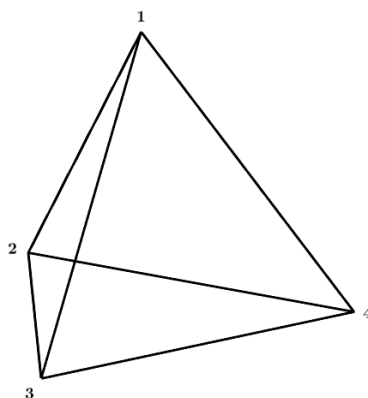
Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de  $f$ .
2. La fonction  $f$  a-t-elle des extremums locaux ? A-t-elle des extremums globaux ?

### Exercice 2.

Un personnage se déplace aléatoirement d'un sommet à l'autre d'un tétraèdre dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3 et 4.



Lorsqu'il se trouve sur un sommet, il se déplace sur un des trois autres sommets avec la même probabilité.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  le sommet où se trouve le personnage après  $n$  déplacements et on suppose que  $X_0 = 1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}$ , on note  $q_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$  et on suppose que  $q_{ij}$  ne dépend pas de  $n$ .

Soit  $p$  et  $q$  des entiers naturels non nuls.

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = (a_{ij}(n))_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ . On dit que la suite de matrices  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ , la suite  $(a_{ij}(n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

1. (a) Écrire la matrice  $Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$ .
- (b) On note  $K \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Exprimer  $Q$  en fonctions des matrices  $K$  et  $I_4$ .
- (c) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$Q^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I_4 + \frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] K.$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mu_n = (P(X_n = 1) \ P(X_n = 2) \ P(X_n = 3) \ P(X_n = 4)) \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ .
- (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_{n+1} = \mu_n Q$ .
  - (b) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_n = \mu_0 Q^n$ .
  - (c) Montrer que la suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $\mu_\infty$  que l'on déterminera.
  - (d) Interpréter le résultat de la question précédente.
3. On note  $Z$  le nombre de déplacements pour que le personnage revienne au sommet 1 pour la première fois.
- (a) Calculer  $P(Z = 1)$  et  $P(Z = 2)$ .
  - (b) Calculer, pour tout  $k \geq 2$ ,  $P(Z = k)$ .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

On lance pièce équilibrée et on suppose que les lancers sont indépendants. Pour un entier  $n \geq 1$ , on note :

- $X_n$  le résultat du  $n$ -ième tirage :  $X_n = 1$  si on tire pile et  $X_n = 0$  sinon ;
- $e_n$  la variable aléatoire qui est égale à 1 si on obtient un nombre pair de piles dans les  $n$  premiers lancers et 0 sinon.

1. (a) Déterminer la loi de  $e_1$ .

(b) Soit  $n \geq 2$  un entier.

i. Pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \{0, 1\}^{n-1}$ , justifier que

$$P\left(e_n = 1 \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k = x_k)\right) = P\left(e_n = 0 \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k = x_k)\right) = \frac{1}{2}.$$

ii. En déduire que  $e_n$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

(c) Soit  $n \geq 2$  un entier. Montrer que  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont indépendantes.

(d) Montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$P\left(\left|\frac{e_1 + e_2 + \dots + e_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $T_n = \frac{e_1 e_2 + \dots + e_{n-1} e_n + e_n e_{n+1}}{n}$ .

(a) Déterminer la loi de  $e_1 e_2$ .

(b) Soit  $n \geq 2$ .

i. Calculer  $P(e_n e_{n+1} = 1 | e_{n-1} = 1)$  et  $P(e_n e_{n+1} = 1 | e_{n-1} = 0)$ .

ii. En déduire la loi de  $e_n e_{n+1}$ .

(c) Soit  $n \geq 1$ , justifier que  $T_n$  admet une espérance et la calculer.

Soit  $n \geq 1$  un entier. On admet que pour des variables aléatoires  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  qui admettent une variance,  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  admet une variance et :

$$V(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = \sum_{k=1}^n V(Y_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(Y_i, Y_j).$$

(d) Soit  $n \geq 3$ .

i. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , calculer  $V(e_i e_{i+1})$ .

ii. Montrer que

$$V(T_n) = \frac{3}{16n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-2} \text{Cov}(e_i e_{i+1}, e_{i+1} e_{i+2}).$$

iii. Montrer que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ ,  $\text{Cov}(e_i e_{i+1}, e_{i+1} e_{i+2}) \leq \frac{3}{16}$ .

(e) En déduire que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$P \left( \left| T_n - \frac{1}{4} \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

### Exercice 2.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit le polynôme  $P_n$  par, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}.$$

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P_n(x) = P'_n(x) + \frac{x^n}{n!}$ .
2. Soit un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que le polynôme  $P_{2n}$  n'a pas de racine réelle.
  - (a) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P_{2n}(x) > 0$ .
  - (b) Montrer qu'il existe un unique réel  $a_{2n+1}$  tel que  $P_{2n+1}(a_{2n+1}) = 0$  et que  $a_{2n+1} < 0$ .
  - (c) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P_{2n+2}(x) > 0$ .
3. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_n$  a au plus une racine réelle.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

Soit  $n \geq 2$  un entier. On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\| \cdot \|$  la norme associée.

Soit  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un endomorphisme tel que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$ .

On rappelle qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est antisymétrique si  ${}^tA = -A$ .

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle u(x), x \rangle = 0$ .
2. Montrer que la matrice de  $u$  dans une base orthonormale est antisymétrique.
3. Quelles sont les valeurs propres possibles de  $u$  ?
4. Montrer que  $\text{Im } u$  et  $\text{ker } u$  sont des supplémentaires orthogonaux dans  $\mathbb{R}^n$ .
5. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $u(F) \subset F$ , c'est-à-dire : pour tout  $x \in F$ ,  $u(x) \in F$ .  
Montrer que  $u(F^\perp) \subset F^\perp$ .
6. Montrer que  $\text{ker } u = \text{ker } u^2$ .

### Exercice 2.

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On lance  $n$  fois un dé équilibré et on note le résultat de cette expérience sous forme d'un  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n) \in \{1, 2, \dots, 6\}^n$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . On dit qu'un résultat est  $k$ -différent s'il ne comporte pas  $k$  lancers consécutifs qui ont donné la même face.

Exemple : en prenant  $n = 8$ ,  $(3, 2, 1, 1, 1, 4, 5, 6)$  est un résultat 4-différent mais pas 3-différent, ni 2-différent. Il est aussi  $k$ -différent pour tout entier  $k \geq 5$ .

On note  $u_n(k)$  le nombre de résultats qui sont  $k$ -différents et  $p_n(k)$  la probabilité qu'un résultat soit  $k$ -différent.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ? En déduire une expression de  $p_n(k)$  en fonction de  $u_n(k)$ .
2. Pour  $k > n$ , donner  $u_n(k)$  et  $p_n(k)$ .
3. Pour  $k = n$ , donner  $u_n(n)$  et  $p_n(n)$ .
4. On s'intéresse aux résultats 2-différents. Donner  $u_n(2)$  et  $p_n(2)$ .
5. Montrer que pour tous entiers  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $k$  vérifiant  $2 \leq k \leq n$ ,  $5u_n(k) \leq u_{n+1}(k) \leq 6u_n(k)$ .
6. Montrer que  $(p_n(k))_{n \geq 2}$  est décroissante et convergente.
7. Montrer que pour tous entiers  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $k$  vérifiant  $2 \leq k \leq n$ ,  $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \leq p_n(k) \leq 1$ .
8. On s'intéresse aux résultats 3-différents.  
Montrer que pour tout  $n \geq 3$ ,  $u_n(3) = 5(u_{n-1}(3) + u_{n-2}(3))$ .  
Comment pourrait-on alors déterminer une expression de  $p_n(3)$  en fonction de  $n$  ? On ne demande pas d'effectuer les calculs.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on pose  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer le rang de  $A(a)$  selon les valeurs de  $a \in \mathbb{R}$ .
2. Est-ce que  $A(a)$  est diagonalisable ? Vous discuterez selon les valeurs de  $a \in \mathbb{R}$ .
3. On note dans cette question  $A = A(1)$ .  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $\frac{1}{4^n} A^n$ .

### Exercice 2.

1. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}} dt$  converge si, et seulement si,  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}} dt$ .

2. Déterminer le signe et le sens de variations de la fonction  $f$ .
3. Étudier la nature de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ .
4. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u^2+ux}} du$ .
5. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
6. (a) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f(x) \geq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u + \frac{x}{2}} du$ .  
(b) En déduire que, pour tout  $x \in ]0, 2]$ ,

$$f(x) \geq e^{\frac{x}{2}} \int_{\frac{x}{2}}^1 \frac{e^{-v}}{v} dv.$$

- (c) Déterminer la limite de  $f$  en 0.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi géométrique de paramètre  $p$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que la variable aléatoire  $\frac{1}{S_n}$  a une espérance que l'on notera  $m$  dans la suite.
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  tels que  $k \geq n$ .  
Montrer que  $\frac{S_k}{S_n}$  admet une espérance et donner sa valeur en fonction de  $k, n, m$  et  $p$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  tels que  $k \leq n$ .  
On admet que  $\frac{X_k}{S_n}$  suit la même loi que  $\frac{X_1}{S_n}$ .  
Montrer que  $\frac{S_k}{S_n}$  admet une espérance et donner sa valeur en fonction de  $k$  et  $n$ .

### Exercice 2.

1. (a) Montrer que l'intégrale  $\int_0^1 (1 - \ln t) dt$  converge et la calculer.  
(b) Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $\int_0^x \frac{1 - \ln t}{2 + t^2} dt$  converge.

On définit la fonction  $F: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $F(0) = 0$  et, pour tout  $x > 0$ ,  $F(x) = \int_0^x \frac{1 - \ln t}{2 + t^2} dt$ .

- (c) Montrer que  $F$  est continue en 0.  
(d) Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .  
(e) Étudier les variations de  $F$ .
2. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = F(u_n)$ .  
(a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, 1]$ .  
(b) Étudier la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  
(c) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
3. On pose, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $g(x) = F(x) - x$ .  
(a) Montrer qu'il existe un unique réel  $\beta \in ]0, 1]$  tel que  $g'(\beta) = 0$ .  
(b) En déduire les variations de  $g$ .  
(c) Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha \in ]\beta, 1]$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .
4. (a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq \alpha$ .  
(b) En déduire que la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est  $\alpha$ .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$n$  personnes portant des dossards numérotés de 1 à  $n$  participent à une course à pied et terminent entre midi et treize heures.

Pour tout entier  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,

- on note  $T_i$  l'instant d'arrivée du coureur classé en  $i$ -ième position,
- on note  $U_i$  l'instant d'arrivée du coureur numéro  $i$  et on suppose que les variables  $U_1, \dots, U_n$  sont indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Ainsi, midi est représenté par 0, treize heures est représenté par 1 et l'événement  $[U_i \leq 1/2]$  est l'événement : "le coureur numéro  $i$  arrive au plus tard à midi et demi".

Pour tout réel  $t$  de  $[0, 1]$ , on note  $N_t$  le nombre de coureurs ayant terminé au plus tard à l'instant  $t$ .

1. Déterminer la loi de  $N_t$ .
2. Soit  $i$  un entier de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .
  - (a) Exprimer sous forme d'une somme la fonction de répartition de  $T_i$  sur  $[0, 1]$ .
  - (b) Justifier que  $T_i$  est une variable à densité et en déterminer une densité.
  - (c) Montrer que  $T_i$  admet une espérance et la déterminer.

(On pourra introduire  $J_i = \int_0^1 t^i (1-t)^{n-i} dt$  et déterminer une relation de récurrence entre  $J_i$  et  $J_{i+1}$ .)

### Exercice 2.

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose  $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & 0 & n-1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de coefficients  $a_{i,j}$  tous nuls exceptés ceux tels que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad a_{k+1,k} = n-k, \quad a_{k,k+1} = k.$$

On note  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble des matrices diagonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  la matrice de  $\mathcal{D}_n$  dont les coefficients diagonaux sont les réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

1.  $A_2$  est-elle inversible ?  $A_2$  est-elle diagonalisable ?
2.  $A_3$  est-elle inversible ?

Dans la suite de l'exercice, on choisit  $n = 4$  et on note  $A$  la matrice  $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

3. (a) Montrer que  $A$  est diagonalisable.  
(b) Justifier qu'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  inversible telle que  $P^{-1}AP = D$ , où  $D = \text{Diag}(a, b, c, d)$  avec  $a > b > c > d$ .  
*On ne demande pas d'explicitier la matrice  $P$ .*
4. (a) Montrer que l'application  $\phi: \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ,  $M \mapsto PMP^{-1}$  est un isomorphisme.  
(b) Montrer que, pour tout  $(M, N) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})^2$ ,  $\phi^{-1}(MN) = \phi^{-1}(M)\phi^{-1}(N)$ .
5. On considère  $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ .
  - (a) Montrer que  $\mathcal{C}_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .
  - (b) Montrer qu'une matrice  $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  commute avec  $D$  si, et seulement si,  $N$  est une matrice diagonale.
  - (c) Montrer que  $\mathcal{C}_A = \phi(\mathcal{D}_4)$ .
  - (d) En déduire la dimension de  $\mathcal{C}_A$ .
  - (e) Montrer que la famille  $(I_4, A, A^2, A^3)$  est une base de  $\mathcal{C}_A$ .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

Soit  $\alpha > 0$ ,  $x_0 > 0$  et  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x_0} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que  $f$  est une densité de probabilité.  
On note  $X$  une variable aléatoire dont une densité est  $f$ , on dit que  $X$  suit une loi de Pareto de paramètres  $\alpha$  et  $x_0$ .
- (b) Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .
- (c) Pour quelle(s) valeur(s) de  $\alpha$  la variable  $X$  admet-elle une espérance ? Calculer l'espérance de  $X$  quand elle existe.
- (d) Pour quelle(s) valeur(s) de  $\alpha$  la variable  $X$  admet-elle une variance ?
- (e) On suppose  $\alpha > 1$  et on pose, pour tout  $x > x_0$ ,

$$M_X(x) = \frac{\int_x^{+\infty} t f(t) dt}{\int_x^{+\infty} f(t) dt}.$$

Pour tout  $x > x_0$ , calculer  $M_X(x)$ .

2. Soit  $x_0 > 0$  et  $Y$  une variable aléatoire à valeurs dans  $[x_0, +\infty[$  qui admet pour densité une fonction  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
On suppose que  $h$  est une fonction continue et à valeurs strictement positives sur  $[x_0, +\infty[$ , que  $Y$  admet une espérance et qu'il existe un réel  $k > 1$  vérifiant, pour tout  $x \geq x_0$ ,

$$M_Y(x) = \frac{\int_x^{+\infty} t h(t) dt}{\int_x^{+\infty} h(t) dt} = kx.$$

On pose, pour tout  $x \geq x_0$ ,

$$G(x) = \int_x^{+\infty} h(t) dt.$$

- (a) Montrer que, pour tout  $x \geq x_0$ ,  $G(x) = \frac{1-k}{k} x G'(x)$ .
- (b) Pour tout  $x \geq x_0$ , en déduire l'expression de  $G(x)$  en fonction de  $x$ ,  $x_0$  et  $k$ .  
*Indication : on pourra dériver la fonction  $\varphi: x \mapsto x^{\frac{k}{k-1}} G(x)$ .*
- (c) Calculer la fonction de répartition de  $Y$ .
- (d) Que peut-on en déduire sur la loi de  $Y$  ?

**Exercice 2.**

Si  $x$  est un réel strictement positif et  $n$  un entier naturel non nul, on définit  $u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$ .

1. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , simplifier l'expression de  $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ .

2. Déterminer la nature de la série :  $\sum_{n \geq 2} \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$ .

En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et déterminer sa limite.

3. (a) Trouver un réel  $\alpha$  tel que la série  $\sum_{n \geq 2} \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) + \alpha \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$  converge.

(b) En déduire qu'il existe un réel  $A > 0$  tel que :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} An^\alpha$ .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, f(x, y) = x((\ln(x))^2 + y^2).$$

1. Montrer que  $f$  peut admettre un extremum local en deux points  $(a, b)$  et  $(c, d)$  à déterminer. Dans la suite, on prendra  $a$  et  $c$  tels que  $a < c$ .
2. Montrer que  $f$  admet un extremum local en  $(c, d)$  et préciser sa nature. Cet extremum est-il global ?
3. Montrer qu'en  $(a, b)$ ,  $f$  n'admet pas d'extremum local. On pourra étudier les fonctions  $g : t \mapsto f(t, 0)$  et  $h : t \mapsto f(e^{-2}, t)$ .

### Exercice 2.

Soit  $N$  et  $n$  des entiers naturels non nuls.

On dispose de  $N$  boîtes numérotées de 1 à  $N$ . On répartit  $n$  boules dans ces boîtes de la façon suivante : chaque boule est placée dans une boîte choisie uniformément et indépendamment des autres boules (une boîte peut donc contenir plusieurs boules). On note :

- Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_i$  le numéro de la boîte où l'on place la boule  $i$  ;
- Pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $N_k$  le nombre de boules dans la boîte  $k$  ;
- Pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $Y_k$  la variable aléatoire égale à 1 si la boîte  $k$  est vide et 0 sinon.

1. Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , quelle est la loi de  $X_i$  ?
2. Quelle est la loi de  $N_1$  ? Quelle est son espérance ?
3. (a) Calculer  $P(Y_1 = 1)$ .  
(b) Calculer  $P([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1])$ .  
(c)  $Y_1$  et  $Y_2$  sont-elles indépendantes ?
4. On note  $Z$  le nombre de boîtes vides.
  - (a) Exprimer  $Z$  à l'aide de  $Y_1, \dots, Y_N$ .
  - (b) En déduire l'espérance de  $Z$ .
  - (c) Calculer  $E(Z^2)$  puis en déduire que la variance de  $Z$  est :

$$V(Z) = N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + N(N-1) \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - N^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2n}.$$

On rappelle que, pour tout  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ ,  $(x_1 + \dots + x_N)^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} x_i x_j$ .

Dans la suite de l'exercice, on suppose que  $N = n$  et on note  $Z_n$  au lieu de  $Z$ .

5. Que représente  $\frac{Z_n}{n}$  ?

6. Quelle est la limite de  $\frac{E(Z_n)}{n}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ? On note  $\ell$  cette limite.

7. On admet qu'il existe un réel  $C > 0$  tel que  $V(Z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Cn$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

(a) Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - \ell\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - E\left(\frac{Z_n}{n}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

(b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - \ell\right| > \varepsilon\right)$ .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$ .

1. Soit  $n \geq 2$ .
  - (a) Déterminer le signe de  $f_n(0)$  et  $f_n(1)$ .
  - (b) Dresser le tableau de variations de  $f_n$  sur  $[0, +\infty[$ .
  - (c) Montrer que  $f_n$  s'annule exactement deux fois sur  $[0, +\infty[$ . On note  $u_n$  et  $v_n$  ces deux points, avec  $u_n < v_n$ .
  - (d) Montrer que  $0 < u_n < 1 \leq \sqrt{\frac{n}{2}} < v_n$ .
2. Déterminer la limite de  $(v_n)_{n \geq 2}$ .
3. On étudie dans cette question la convergence de  $(u_n)_{n \geq 2}$ .
  - (a) Soit  $n \geq 2$ , déterminer le signe de  $f_{n+1}(u_n)$ .
  - (b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  est monotone et déterminer son sens de variation.
  - (c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.
  - (d) En raisonnant par l'absurde, montrer que  $\ell = 1$ .

### Exercice 2.

On rappelle qu'une matrice carrée  $A$  est symétrique si  ${}^tA = A$ .

Dans cet exercice, on pourra admettre le résultat suivant : si  $M$  est une matrice symétrique à coefficients réels, alors  $M$  est diagonalisable.

Soit  $E = \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ) muni du produit scalaire usuel. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

1. Dans cette question uniquement, on suppose que  $f$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice dans la base canonique est la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ .  
 On note  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et on appelle  $x$  et  $y$  les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  représentés par  $X$  et  $Y$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .
  - (a) Exprimer  $f(x)$  et  $f(y)$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
  - (b) On pose  $z = ax + y$  où  $a$  désigne un réel.  
Peut-on trouver  $a$  tel que  $z$  soit un vecteur non nul, orthogonal à  $f(z)$  ?
2. On revient au cas général et on suppose que  $f$  possède deux valeurs propres non nulles et de signes opposés.  
Montrer qu'il existe un vecteur non nul  $z \in E$  orthogonal à  $f(z)$ .

3. On suppose que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , de trace nulle, donc la matrice  $A$  dans la base canonique de  $E$  est une matrice symétrique.  
Montrer qu'il existe un vecteur non nul  $z \in E$  orthogonal à  $f(z)$ .
4. (a) Soit  $g$  un endomorphisme de  $E$  dont la matrice  $B$  dans la base canonique vérifie  ${}^tB = -B$ .  
Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $g(x)$  est orthogonal à  $x$ .
- (b) On suppose dans cette question que  $f$  est un endomorphisme de  $E$  de trace nulle.  
Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans la base canonique.  
Soient  $B = A - {}^tA$  et  $g$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base canonique est la matrice  $B$ .  
Soient  $C = A + {}^tA$  et  $h$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base canonique est la matrice  $C$ .  
Montrer qu'il existe un vecteur non nul  $z \in E$  orthogonal à  $f(z)$ .

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

Soit un entier  $n$  supérieur ou égal à 2.

On considère un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

On dit que  $f$  est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur  $x_0$  de  $E$  tel que la famille

$$(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$$

soit une base de  $E$ .

1. À quelle(s) condition(s) un projecteur de  $E$  est-il cyclique ?

2. On suppose que  $f$  est cyclique.

Montrer que s'il existe  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  tel que, pour tout  $x \in E$ ,

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0_E,$$

alors, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\lambda_k = 0$ .

3. On suppose dans cette question que  $n = 3$ , que  $f$  est diagonalisable et qu'il admet exactement deux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$ .

On note  $g$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $g = f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu \text{Id}_E$ .

(a) Calculer  $g(u)$  lorsque  $u$  est un vecteur propre de  $f$ .

(b) En déduire que  $g$  est l'endomorphisme nul.

(c) L'endomorphisme  $f$  est-il cyclique ?

4. On suppose dans cette question que  $f$  est un endomorphisme de  $E$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on appelle  $x_i$  un vecteur propre associé à  $\lambda_i$ .

En considérant le vecteur  $x_0 = \sum_{k=1}^n x_k$ , montrer que  $f$  est cyclique.

5. On pose maintenant  $E = \mathbb{R}_{n-1}[x]$  et on considère l'application  $\Delta$  définie par :

$$\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$

(a) Exprimer le degré de  $\Delta(P)$  en fonction du degré de  $P$ .

(b) Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $E$ .

(c) Déterminer le noyau et l'image de  $\Delta$ .

(d) Déterminer les valeurs propres de  $\Delta$ .

L'endomorphisme  $\Delta$  est-il diagonalisable ?

(e)  $\Delta$  est-il cyclique ?

On pourra admettre la propriété suivante : si  $r \in \mathbb{N}^*$  et si  $(P_0, P_1, \dots, P_{r-1})$  est une famille de polynômes telle que, pour tout  $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ ,  $\deg P_i = i$ , alors la famille  $(P_0, P_1, \dots, P_{r-1})$  est libre.

**Exercice 2.**

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi logistique si elle admet pour densité la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = c \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2},$$

où  $c \in \mathbb{R}$ .

1. Calculer  $c$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes et de loi logistique.
  - (a) On pose  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ .  
Montrer que  $M_n$  est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
  - (b) On pose  $Y_n = M_n - \ln n$ .
    - i. Calculer la fonction de répartition  $G_n$  de  $Y_n$ .
    - ii. En déduire que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la suite  $(G_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une limite à déterminer.
    - iii. On pose, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(t)$ .  
Montrer que  $G$  est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

On définit la partie entière d'un réel  $x$  comme l'unique entier noté  $[x]$  vérifiant :

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Pour tout  $x$  réel, on pose  $y = [x]$  et  $z = [10(x - y)]$ .

1. Que valent  $y$  et  $z$  lorsque  $x = 1,414$  ?  $x = 12,563$  ?

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .

On note  $Y = [X]$  et  $Z = [10(X - Y)]$ .

2. Déterminer la loi de  $Y$ .  
En déduire la loi de  $Y + 1$  et préciser la valeur de l'espérance de  $Y$  et de la variance de  $Y$ .
3. Déterminer  $Z(\Omega)$ .
4. Soit  $i \in \mathbb{N}$  et  $k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Montrer que :

$$P((Y = i) \cap (Z = k)) = F\left(i + \frac{k+1}{10}\right) - F\left(i + \frac{k}{10}\right)$$

où  $F$  désigne la fonction de répartition de  $X$ .

5. Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, 9\}, P(Z = k) = e^{-\lambda k/10} \frac{1 - e^{-\lambda/10}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

6. Montrer que  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes.

### Exercice 2.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et, quand la

série de terme général  $u_n$  converge,  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ .

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on définit les suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ et } w_n = \frac{u_n}{R_n^\alpha}$$

1. On suppose que la série de terme général  $u_n$  diverge.
  - (a) Étudier la monotonie et préciser la convergence de la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

(b) Supposons  $\alpha > 1$ .

i. Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $v_n \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$ .

ii. En déduire que les sommes partielles de la série de terme général  $v_n$  sont majorées.

iii. Quelle est la nature de la série  $\sum v_n$  ?

(c) On veut montrer que la série de terme général  $\frac{u_n}{S_n}$  diverge. On raisonne par l'absurde en supposant que cette série converge.

i. Soit  $p$  et  $N$  des entiers naturels. Montrer que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{u_n}{S_n} \geq 1 - \frac{S_{N-1}}{S_{N+p}}.$$

ii. Conclure.

(d) En déduire que, pour tout  $\alpha < 1$ ,  $\sum v_n$  diverge.

2. On suppose que la série de terme général  $u_n$  converge.

(a) Étudier la monotonie et préciser la convergence de la suite  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

(b) Supposons  $\alpha < 0$ . Montrer que la série de terme général  $w_n$  converge.

(c) Supposons  $0 \leq \alpha < 1$ .

i. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n \leq \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{dt}{t^\alpha}$ .

ii. En déduire que les sommes partielles de la série de terme général  $w_n$  sont majorées.

iii. Quelle est la nature de la série  $\sum w_n$  ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique réel  $u_n$  vérifiant  $u_n^3 + nu_n = 1$ .
2. Justifier que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite à termes positifs puis étudier la convergence de cette suite.
3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
4. (a) Déterminer un réel  $a$  et un entier naturel non nul  $k$  tels que, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  

$$u_n \sim \frac{a}{n^k}.$$
 Dans la suite, on note pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \frac{a}{n^k}$ .  
 (b) Déterminer un équivalent de  $u_n - v_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 2.

Soit  $n \geq 1$  un entier. On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\| \cdot \|$  la norme associée.

Soit  $p \geq 1$  un entier et  $(y_1, \dots, y_p)$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  telle qu'il existe  $A$  et  $B$  strictement positifs vérifiant, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^p \langle x, y_j \rangle^2 \leq B\|x\|^2.$$

On note  $F = \text{Vect}(y_1, \dots, y_p)$ .

1. (a) Déterminer  $F^\perp$ .  
 (b) En déduire que  $(y_1, \dots, y_p)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^n$ .
2. On suppose dans cette question que  $n = 2$ . On pose  $y_1 = (1, 0)$ ,  $y_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $y_3 = y_2$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,

$$S = \sum_{j=1}^3 \langle x, y_j \rangle^2.$$

- (a) Si  $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , montrer que  $S = \frac{1}{2}(5a^2 + b^2 + 2ab\sqrt{3})$ , puis vérifier que

$$S = \frac{1}{2} \left[ \left( b \frac{\sqrt{3}}{2} + 2a \right)^2 + a^2 + \frac{1}{4}b^2 \right].$$

(b) En déduire qu'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  strictement positifs tels que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\alpha\|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^3 \langle x, y_j \rangle^2 \leq \beta\|x\|^2.$$

3. On suppose dans cette question que  $A = B = 1$  et que, pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\|y_j\| = 1$ .  
Montrer que,  $(y_1, \dots, y_p)$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$ .

4. Dans cette question, on suppose que  $A = B$  et on définit une application  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en posant, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(x) = \sum_{j=1}^p \langle x, y_j \rangle y_j.$$

(a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ .

(b) Montrer que, pour tout  $(x, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\langle f(x), x' \rangle = \langle x, f(x') \rangle$ .

(c) Quelles sont la (les) valeur(s) propre(s) possible(s) de  $f$  ?

(d) On admet que  $f$  est diagonalisable.

Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$x = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^p \langle x, y_j \rangle y_j.$$

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.

Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.

L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.

Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

### Exercice 1.

Soit  $b, r, v$  des réels appartenant à  $]0, 1[$  et tels que  $b + r + v = 1$ .

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes. On suppose que la proportion de boules blanches dans l'urne est  $b$ , la proportion de boules rouges est  $r$  et la proportion de boules vertes est  $v$ .

On effectue des tirages successifs dans l'urne avec remise, on s'arrête au premier changement de couleur.

Pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_i$  (respectivement  $R_i, V_i$ ) « la  $i$ -ième boule tirée est blanche » (respectivement rouge, verte). On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. (a) Quelles sont les valeurs possibles prises par  $X$  ?
- (b) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $P(X = k) = (1 - b)b^{k-1} + (1 - r)r^{k-1} + (1 - v)v^{k-1}$ .
- (c) Montrer que  $X$  admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{1}{1 - b} + \frac{1}{1 - r} + \frac{1}{1 - v} - 2.$$

2. On considère la fonction  $f$  définie par : pour tout  $(x, y) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 - y} + \frac{1}{x + y}.$$

- (a) Montrer que  $f$  admet un unique point critique dans  $]0, 1[ \times ]0, 1[$ . On le note  $A$ .
- (b)  $f$  admet-elle un extremum local en  $A$  ?
- (c) Que peut-on en déduire sur  $E(X)$  ?

### Exercice 2.

Soit  $n \geq 1$  un entier. On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\| \cdot \|$  la norme associée.

1. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $p$  le projecteur orthogonal sur  $F$ .  
Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|p(x)\| \leq \|x\|$  et que l'inégalité est stricte si  $x \notin \text{Im } p$ .
2. Montrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$ .

Soit  $F_1, F_2$  des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p_1$  le projecteur orthogonal sur  $F_1$  et  $p_2$  le projecteur orthogonal sur  $F_2$ . On pose  $q = p_2 \circ p_1$ ,  $q' = p_1 \circ p_2$  et  $F = F_1 \cap F_2$ .

3. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|q(x)\| = \|x\|$  si, et seulement si  $x \in F$ .
4. Montrer que  $\ker(q - \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = F$  et  $\ker(q' - \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = F$ .
5. Montrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\langle q(x), y \rangle = \langle x, q'(y) \rangle$ .
6. Montrer que  $F$  et  $\text{Im}(q - \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$  sont des supplémentaires orthogonaux dans  $\mathbb{R}^n$ .