ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

15 parvis René-Descartes
BP 7000, 69342 Lyon cedex 07
Tél. +33 (0)4 37 37 60 00
www.ens-lyon.fr

Concours d’entrée 2025

Annexe sujets

Mathématiques Série Sciences Économiques et Sociales

ENS DE LYON

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit V une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On dit que V admet une espérance si les deux séries $\sum_{n\geq 1} n\mathrm{P}(V=n)$ et $\sum_{n\geq 1} n\mathrm{P}(V=-n)$ sont convergentes, et si c'est le cas, l'espérance de V est

$$\mathrm{E}(V)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{P}(V=n)-\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{P}(V=-n).$$

On rappelle que $\lfloor t\rfloor$ désigne la partie entière du réel t, c'est-à-dire que $\lfloor t\rfloor$ est l'unique entier vérifiant $\lfloor t\rfloor \leq t < \lfloor t\rfloor+1$.
On considère une variable aléatoire T suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et on pose $X=\lfloor T\rfloor$.
On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. (a) Rappeler une fonction de densité de la variable aléatoire T.
   (b) On pose $Y=-T$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
2. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
3. (a) Pour tout entier relatif, exprimer la probabilité $\mathrm{P}(X=k)$ à l'aide de la fonction Φ.
   (b) Vérifier que
   $$\forall k\in\mathbb{Z},\ \mathrm{P}(X=-k)=\mathrm{P}(X=k-1).$$
4. Démontrer que
   $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathrm{P}(X=k)-\mathrm{P}(X=-k)\right)=n\Phi(n+1)-(n+1)\Phi(n)+\Phi(0).$$
5. (a) Justifier que, pour tous réels x et y vérifiant $0\leq x\leq y$, on a :
   $$0\leq \Phi(y)-\Phi(x)\leq (y-x)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$
   (b) En déduire que la série de terme général $n\left(\Phi(n+1)-\Phi(n)\right)$ est convergente.
6. Justifier que la variable aléatoire X admet une espérance et calculer sa valeur.

TSVP

Exercice 2.

Soit $n \geq 1$ un entier et on pose $E = \mathbb{R}^n$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur E et $\| \cdot \|$ la norme associée.

1. Soit A et B deux parties non vides de E telles que $A \subset B$.
   (a) Montrer que $B^\perp \subset A^\perp$.
   (b) Montrer que $A^\perp = [\mathrm{Vect}(A)]^\perp$.
2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.
   (b) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
   (c) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
3. On considère H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\}.$$
   Déterminer une base de $H^\perp$.
4. Soit x et y deux vecteurs de E.
   Montrer que x et y sont orthogonaux si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|x + ty\| \geq \|x\|$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Soit $n \geq 1$ un entier naturel, on pose $E = \mathbb{R}^n$. On considère u et v deux endomorphismes de E.

1. (a) Montrer que $\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
   (b) En déduire que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v)$.
2. (a) Montrer que si $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v) = \{0_E\}$ alors $\ker(u+v) = \ker(u) \cap \ker(v)$.
   (b) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
      (i) $\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$,
      (ii) $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v) = \{0_E\}$ et $\ker(u) + \ker(v) = E$.

Exercice 2.
Les parties A et B sont indépendantes.
Partie A.
Soit $n \geq 2$. Dans un casino, le jeu suivant est proposé aux clients : n clients prennent place autour d'une table.
Chaque joueur mise un euro sur la table et, indépendamment des autres joueurs, il inscrit « pile » ou « face » sur un papier sans le montrer aux autres joueurs.
Un employé du casino lance ensuite une pièce équilibrée.
La somme de n euros est alors partagée équitablement entre les gagnants, c'est-à-dire ceux qui avaient inscrits sur leur papier la face sur laquelle la pièce est tombée. S'il n'y a pas de gagnant, la mise revient au casino.
Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note X_k la somme aléatoire que reçoit le joueur k.

1. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Calculer l'espérance de X_k.
2. Dans cette question, on suppose qu'une nouvelle personne arrive et souhaite jouer. On demande alors l'avis d'un joueur déjà présent et de l'employé du casino.
   (a) Que doit répondre le joueur s'il veut maximiser la somme moyenne qu'il peut recevoir ?
   (b) Que doit répondre l'employé du casino s'il veut maximiser la somme moyenne qu'il peut encaisser ?
3. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.
   (a) Exprimer $E(X_k^2)$ sous forme d'une somme finie.
   (b) On admet provisoirement que si $x_0, \dots, x_{n-1}$ sont des réels quelconques et si $t_0, \dots, t_{n-1}$ sont des réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} t_i = 1$, alors :
   $$\left(\sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i\right)^2 \leq \sum_{i=0}^{n-1} t_i x_i^2.$$
   Montrer que :
   $$E(X_k^2) \geq 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2.$$
   (c) En déduire que $V(X_k) \geq E(X_k)^2$.

TSVP

Partie B.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que f est une fonction convexe si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Dans la suite de cette partie, on suppose que f est une fonction convexe.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de réels de I et tout n-uplet $(t_1, \ldots, t_n)$ de réels positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a :

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n).$$

2. Soit $n \geq 2$ un entier et X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, \ldots, x_n$. On suppose que $x_1, \ldots, x_n$ appartiennent à I.
   (a) Montrer que $f(E(X)) \leq E(f(X))$.
   (b) En déduire que $(E(X))^2 \leq E(X^2)$.
   Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

1. *Question préliminaire.* Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2}$$

2. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
   $$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
   (b) Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $H_n \sim \ln(n)$.
4. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln(2)$.
   (b) Déterminer des réels a, b et c tels que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}.$$
   (c) Donner une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ en fonction de termes de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

TSVP

Exercice 2.

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\| \cdot \|$ associée.

Soit F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale de E sur F.

1. Justifier que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times F^{\perp}$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Si x est un vecteur de E et si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F \times F^{\perp}$, on pose : $\sigma(x) = x_1 - x_2$.

2. (a) Exprimer σ en fonction de p et de Id_E.
   (b) Montrer que σ est un automorphisme de E et que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|\sigma(x)\| = \|x\|$.
3. Soit G un autre sous-espace vectoriel de E et q la projection orthogonale de E sur G.
   On pose $\sigma' = 2q - \mathrm{Id}_E$.
   Montrer que pour tout $u \in E$, $\|p(u) - q(u)\| \leq \|u\|$.
4. Soit a et b deux vecteurs non nuls de E tels que $\|a - b\| = \|a\| + \|b\|$.
   (a) Montrer que $\langle a, b \rangle = -\|a\| \times \|b\|$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $b = -\lambda a$.
   Indication : utiliser la fonction P définie par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \|ta + b\|^2$.
5. On suppose qu'il existe un élément non nul $u \in E$ tel que $\|p(u) - q(u)\| = \|u\|$.
   (a) Montrer que $\|\sigma(u) - \sigma'(u)\| = \|\sigma(u)\| + \|\sigma'(u)\|$.
   (b) En déduire que $\sigma(u) = -\sigma'(u)$.
   (c) Montrer que $F \cap G^{\perp} \neq \{0_E\}$ ou $F^{\perp} \cap G \neq \{0_E\}$.
6. On suppose dans cette question que pour tout $u \in E \setminus \{0_E\}$, $\|p(u) - q(u)\| < \|u\|$.
   Montrer que $\dim F = \dim G$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Trois clients C_1, C_2 et C_3 se présentent à une banque qui comporte deux guichets.
Les clients C_1 et C_2 sont pris en charge dès leur arrivée.
Le client C_3 doit donc attendre que C_1 ou C_2 ait terminé pour passer à l'un des deux guichets.
Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, le temps passé au guichet par C_i (exprimé en minutes) est une variable aléatoire X_i qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On suppose que X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes.
On note Y le temps d'attente de C_3 avant son passage au guichet.

1. *Question préliminaire.*
   Soit $x \in]-1, 1[$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = nx^{n-1}$.
   Montrer que la série de terme général u_n converge puis calculer sa somme.
2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y \leq k)$.
   (b) En déduire la loi de Y.
3. On note Z le temps total passé par C_3 dans la banque.
   Déterminer la loi de Z.
4. Calculer le temps moyen passé par C_3 dans la banque.

Exercice 2.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on définit l'application r sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad r(x) = \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

et $R = \{r(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ l'ensemble des images par l'application r.
On pourra utiliser sans démonstration la caractérisation suivante d'un intervalle : *un sous-ensemble non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tout couple (a, b) de I^2 et tout réel s tels que $a \leq s \leq b$, alors s appartient à I.*

1. Justifier que si le réel λ est une valeur propre de f alors λ appartient à l'ensemble R.
2. Pour deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on définit l'application suivante :
   $$h \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \; t \longmapsto tu + (1 - t)v.$$
   (a) Justifier que la fonction $t \mapsto \|h(t)\|^2$ est une fonction polynomiale.
   (b) En déduire que, si la famille (u, v) est libre, alors la fonction $r \circ h$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que l'ensemble R est un intervalle de $\mathbb{R}$.
3. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ distinct de $\{0\}$ et de $\mathbb{R}^n$.
   On suppose ici que f est le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel E.
   (a) Vérifier que $R \subset [0, 1]$.
   (b) Démontrer que $R = [0, 1]$.

TSVP

4. On suppose pour cette question que $n = 2$ et que f est l'endomorphisme défini par $f(e_1) = 2e_1$ et $f(e_2) = e_1 + 2e_2$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de f.
   (b) Justifier que
   $$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad |x_1 x_2| \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}.$$
   (c) Démontrer que $R = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.
5. On suppose dans la suite qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de E telle que chaque vecteur ε_i est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ_i.
   Quitte à réordonner la base $\mathcal{B}$, on suppose que $\lambda_1 = \min(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et $\lambda_n = \max(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
   Justifier que $r(x) = \dfrac{\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
   (b) Démontrer que $R = [\lambda_1, \lambda_n]$.
   (c) On suppose qu'un vecteur non nul x vérifie $r(x) = \lambda_1$.
   Montrer que x est un vecteur propre de f associé à λ_1.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $H_0(x) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(x-i).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (i) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$.
   (ii) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) \in \mathbb{Z}$.
   (iii) Il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k$.

Exercice 2.

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$, la série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ est convergente.

   On pose alors, pour tout $x \geq 0$:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right).$$

2. Déterminer les valeurs de $S(0)$ et $S(1)$.
3. (a) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$ et tout réel $h \neq 0$ tels que $x + h$ appartienne à $[0, +\infty[$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k+x)^2}$ est convergente et que :

$$\left| S(x+h) - S(x) - h \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq h^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

   (b) En déduire que la fonction S est dérivable et croissante sur $[0, +\infty[$.

   On admet que la fonction dérivée S' est également continue sur $[0, +\infty[$.

TSVP

4. On considère une variable aléatoire X qui admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Il n'est pas demandé de vérifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.
On définit la variable aléatoire Y par : $Y = X - \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x, c'est-à-dire que $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

(a) Montrer que :

$$\forall x \in [0,1[, \ \mathrm{P}(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(k \leq X \leq k + x).$$

En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $\mathrm{P}(Y \leq x) = S(x)$.

(b) Exprimer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y à l'aide de S.

(c) Justifier que Y est une variable aléatoire à densité.

5. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \mathrm{d}x.$$

Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante puis qu'elle est convergente vers une limite appartenant à l'intervalle $[0,1]$. On notera γ cette limite.

6. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^1 S(x) \, \mathrm{d}x - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

puis que $\displaystyle\int_0^1 S(x) \, \mathrm{d}x = \gamma$.

7. Justifier que Y admet une espérance puis montrer que : $E(Y) = 1 - \gamma$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On considère la fonction $f\colon]-1,+\infty[\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$,

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à la calculer.
Pour tout entier naturel non nul n, on considère les fonctions polynomiales P_n et Q_n définies par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \qquad \text{et} \qquad Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k^2}.$$

1. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$P_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Dans la suite, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in [0,1]$, $|R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $x \in]0,1]$, exprimer $Q_n'(x)$ en fonction de $P_n(x)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par : $g_n(0) = 0$ et, pour tout $x \in]0,1]$,

$$g_n(x) = \frac{P_n(x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

5. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x$ existe.
6. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$|Q_n(1) - L| \leq \int_0^1 |g_n(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

   (b) En déduire la limite de $Q_n(1)$ quand n tend vers $+\infty$.

TSVP

Exercice 2.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 \\ t & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. (a) Étudier le rang de $A(t)$ selon les valeurs de $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs propres de $A(t)$.
   (c) Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ la matrice $A(t)$ est-elle diagonalisable ?
2. Soit $\lambda > 0$ un réel et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $|T|$ suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose aussi que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(T = k) = P(T = -k)$.
   On note $A(T) = \begin{pmatrix} 0 & T & 1 \\ T & 0 & 1 \\ T & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et R le rang de $A(T)$.
   (a) Déterminer la loi de R.
   (b) Calculer la probabilité que $A(T)$ soit diagonalisable.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le polynôme P_n défini par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, P_n admet une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$.
   On note u_n cette racine.
   (b) Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1}$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.
   (c) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $2u_n - 1 = u_n^{n+1}$.
   (d) Montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $P_n'(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.
   (b) Soit $n \geq 2$, montrer qu'il existe un réel $c_n \in]\frac{1}{2}, u_n[$ tel que :

$$P_n(u_n) - P_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(u_n - \frac{1}{2}\right) P_n'(c_n).$$

   (c) Justifier que $nc_n^{n+1} - (n+1)c_n^n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}nc_n^n$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nc_n^n = 0$.
   (d) En déduire que $P_n'(c_n) \underset{+\infty}{\sim} 4$.
   (e) Déterminer un équivalent de $u_n - \dfrac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.
   (f) En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ quand n tend vers $+\infty$.

TSVP

Exercice 2.

1. *Question préliminaire.*
   Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles quelconques admettant toutes deux une variance, alors :
   $$V(X+Y) = V(X) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y)$$
   On pourra utiliser sans la démontrer la formule généralisant ce résultat à n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ admettant une variance :
   $$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Dans la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient $2n$ boules de couleurs toutes différentes.
La moitié des boules portent le numéro 0, les autres boules sont numérotées de 1 à n.
On extrait simultanément n boules de cette urne.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la boule numéro i fait partie des boules extraites, et 0 sinon.

2. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Déterminer la loi de X_i.
3. Pour $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, i \neq j$, calculer la covariance de (X_i, X_j).
4. On désigne par S la variable aléatoire égale au nombre de boules extraites qui ne portent pas le numéro 0.
   (a) Exprimer S en fonction des variables $X_1, \ldots, X_n$.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de S.
   (c) Est-ce que S suit une loi binomiale ?
5. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules extraites qui portent le numéro 0. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On considère l'application φ définie par :

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & P(x+1)-P(x). \end{array}$$

1. (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, étudier le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré de P.
   (c) Déterminer le noyau de φ.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $\varphi_n\colon \mathbb{R}_{n+1}[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ par :

   $$\forall P \in \mathbb{R}_{n+1}[x],\ \varphi_n(P) = \varphi(P).$$

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est surjective.
   (e) On note $E = \{P \in \mathbb{R}[x] : P(0) = 0\}$ et on considère l'application $\psi\colon E \to \mathbb{R}[x]$ définie par :

   $$\forall P \in E,\ \psi(P) = \varphi(P).$$

   Montrer que ψ est un isomorphisme.
2. (a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
      i. $P_0 = 1$;
      ii. Pour tout $n \geq 1$, $\varphi(P_n) = P_{n-1}$ et $P_n(0) = 0$.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_n)_{0\leq n\leq N}$ est une base de $R_N[x]$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}$. On note pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$. On rappelle que $\varphi^0 = \mathrm{Id}$.

   Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_N[x]$, on a :

   $$Q = \sum_{n=0}^{N} [\varphi^n(Q)](0)\ P_n.$$

4. (a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
      i. $B_0 = 1$;
      ii. Pour tout $n \geq 1$, $B_n' = nB_{n-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
   (b) Justifier que, pour tout $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\varphi(B_n) = nx^{n-1}$.

TSVP

Exercice 2.
On définit la partie entière supérieure d'un réel x comme l'unique entier noté $\lceil x \rceil$ vérifiant :

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil.$$

Par exemple, $\lceil 1,2 \rceil = 2$, $\lceil 4{,}7 \rceil = 5$ et $\lceil 7 \rceil = 7$.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $Y = \lceil X \rceil$ et $Z = Y - X$.

1. Déterminer la loi de Y puis calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, calculer $P((Z \leq t) \cap (Y = k))$.

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e} - 1} & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

3. Montrer que Z admet une densité et que la fonction f est une densité de Z.
4. Justifier que Z admet une espérance et la calculer.
5. Justifier que Z admet une variance et la calculer.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

Soit $n \geq 1$ un entier, A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même rang et telles que $A^2B = A$.

1. Comparer $\ker A$ à $\ker B$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^2$.
3. En déduire que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker A \oplus \operatorname{Im} A$.
4. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et V une matrice inversible telles que

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & V \end{array}\right).$$

5. Montrer qu'il existe des matrices B_1 et B_2 telles que $P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_1 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right)$, où B_2 est de même taille que V.

Soit C et D deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ écrites par blocs

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad D = \left(\begin{array}{c|c} D_{11} & D_{12} \\ \hline D_{21} & D_{22} \end{array}\right),$$

où pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, C_{ij} et D_{ij} sont des matrices.
On admet que si toutes les opérations sur les matrices sont bien définies, alors on peut effectuer le produit de C et de D « par blocs », c'est-à-dire :

$$CD = \left(\begin{array}{c|c} C_{11}D_{11} + C_{12}D_{21} & C_{11}D_{12} + C_{12}D_{22} \\ \hline C_{21}D_{11} + C_{22}D_{21} & C_{21}D_{12} + C_{22}D_{22} \end{array}\right).$$

6. Montrer que $B^2A = B$.
7. Justifier avec un exemple que si $A^2B = A$ et que $\operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} B$, l'égalité $B^2A = B$ n'est plus nécessairement satisfaite.

TSVP

Exercice 2.

1. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t \geq 1 + t$.

   (b) Soit $x > -1$ un réel. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+n)^2}$ converge.

2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$ converge.

On considère la fonction $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-tx}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. (a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, calculer $f(x-1) - f(x)$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx.$$

1. *Question préliminaire.*
   (a) Démontrer que :
   $$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$
   (b) En déduire l'équivalence $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
   On notera a_n cette solution dans la suite de l'exercice.
3. Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente. Vous préciserez sa limite.
4. (a) Déterminer la limite de la suite de terme général na_n.
   (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$.
5. Déterminer la limite de la suite de terme général $v_n = n\left(na_n + \dfrac{1}{2}\right)$.
   En déduire que
   $$a_n = \frac{-1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
6. Justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln(n)}{2}$.

Exercice 2.
On considère une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur $]0,1]$.
On définit alors une variable aléatoire X en posant :

$$X = -\ln\left(\frac{2U}{1+U}\right).$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.
2. Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

TSVP

4. Soit V une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, indépendante de U.
   On définit la variable aléatoire Y par :

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } V = 1 \\ X^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Déterminer en fonction de F la fonction de répartition de Y.

5. On pose $Z = \begin{cases} X & \text{si } U > 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Z.
   (b) La variable aléatoire Z est-elle à densité ?

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On considère, pour tout entier naturel n, l'intégrale u_n définie par

$$u_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \, \mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.
2. Dans cette question, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de réels appartenant à l'intervalle $]0,1]$ et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq a_n + (1-a_n)\left(1-a_n^2\right)^n.$$
3. Soit α un réel strictement positif. Pour tout entier naturel non nul n, on note $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.
   (a) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-a_n^2\right)^n = 0$ si et seulement si $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \frac{1}{2(n+1)}.$$
et en déduire la nature de la série de terme général u_n.
5. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2(n+1)\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n \, \mathrm{d}t.$$
et en déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2(n+1)\left(u_n - u_{n+1}\right).$$
6. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$
7. Pour un réel a fixé de l'intervalle $]0,1]$, on note
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \int_a^1 \left(1-t^2\right)^n \, \mathrm{d}t.$$
Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est convergente et préciser la valeur de sa somme.

TSVP

Exercice 2.

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|$ la norme associée.

1. (a) Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$. Justifier que p est diagonalisable.
   (b) Soit p un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n$.
      i. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
      ii. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$.
      iii. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle p(x), x \rangle = \|p(x)\|^2$.

Soit p et q deux projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$.

2. On suppose uniquement dans cette question que $p \circ q = q \circ p$.
   Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
3. Soit λ une valeur propre de $p \circ q$.
   (a) Supposons $\lambda \neq 0$ et soit x un vecteur propre de $p \circ q$ pour la valeur propre λ.
   Justifier que $x \in \operatorname{Im} p$.
   (b) Montrer que $\lambda \in [0, 1]$.

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.
On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2 ainsi qu'un polynôme P de la forme :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

avec $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.
On note $A = \max(|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|)$ et on suppose qu'au moins un des coefficients a_k est non nul.
L'objectif de cet exercice est de montrer que toute racine complexe du polynôme P est de module strictement inférieur à $1 + A$, c'est-à-dire que :

$$\forall \omega \in \mathbb{C}, \quad P(\omega) = 0 \Rightarrow |\omega| < 1 + A.$$

On note $(\star)$ cette propriété.

1. *Un cas particulier.*
   Déterminer les racines du polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ et vérifier que la propriété $(\star)$ est vérifiée pour ce polynôme.

On revient au cas général et, dans toute la suite, on note f la fonction définie sur $]0\,, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ f(x) = \frac{|a_{n-1}|}{x} + \cdots + \frac{|a_0|}{x^n}.$$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution appartenant à $]0\,, +\infty[$.
   Cette solution sera notée r dans la suite.
3. (a) Montrer que :
   $$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad |P(z) - z^n| \leq |z|^n f(|z|).$$
   (b) En déduire que, si ω est une racine complexe de P, alors $|\omega| \leq r$.
4. (a) Justifier que :
   $$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) \leq A \times \frac{1 - \frac{1}{x^n}}{x - 1}.$$
   (b) En déduire que pour toute racine complexe ω de P, on a : $|\omega| < 1 + A$.

TSVP

Exercice 2.
On considère Y une variable aléatoire qui suit une loi de densité :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. (a) Calculer la fonction de répartition de Y.
   (b) Y admet-elle une espérance ?
2. Déterminer la loi de $U = \dfrac{1}{Y}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Z_n.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = X_n^2$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que T_n est une variable à densité et calculer une densité de T_n.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que T_n admet une espérance et la calculer.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que T_n admet une variance et la calculer.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$.
   Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$P\left(\left|S_n - \frac{2}{\lambda^2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{20}{n\lambda^4\varepsilon^2}.$$

Vous traiterez les deux exercices suivants et vous les présenterez dans l'ordre de votre choix.
Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation dure trente minutes.
L'interrogation comportera une première partie durant laquelle vous présenterez vos résultats sans que le jury n'intervienne. Nous vous invitons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs ou de vos démonstrations mais à vous attacher à mettre en avant les points-clés de vos raisonnements.
Cette première partie durera au maximum quinze minutes. Elle peut être plus courte si vous le souhaitez.
Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris sur celles que vous n'auriez pas abordées durant la préparation.

Exercice 1.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ converge.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) I_n$.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n > 0$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $w_n = \ln\left(I_n n^{-a}\right)$.
   (a) Déterminer l'unique réel a tel que la série de terme général $w_{n+1} - w_n$ converge.
   (b) En déduire qu'il existe $K > 0$ tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K n^a$, où a est le réel trouvé précédemment.
   (c) Que peut-on dire de la série de terme général I_n ?
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme partielle d'ordre n de la série de terme général $(-1)^n I_n$.
   (a) Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite.
   (b) Que peut-on en déduire ?

Exercice 2.

1. *Question préliminaire.* Soit $(Y_p)_{p\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui admettent une variance.
   (a) Montrer que $V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) + 2\,\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)$.
   (b) En déduire que , pour tout $p \geq 2$,
$$V(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_p) = \sum_{k=1}^{p} V(Y_k) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq p} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Soit $n \geq 2$ un entier naturel, on note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des bijections $\sigma \colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. On tire au hasard selon une loi uniforme un élément σ de $\mathscr{S}_n$, on note alors N_n le nombre de points fixes de σ. Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on considère X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si k est un point fixe de σ et 0 sinon.
On rappelle qu'un point fixe de $\sigma \in \mathscr{S}_n$ est un entier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(k) = k$.

2. Calculer le cardinal de $\mathscr{S}_n$.
3. (a) Exprimer N_n en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
   (b) Calculer l'espérance de N_n.
4. Calculer la variance de N_n.
5. (a) Calculer $P(N_n = n)$.
   (b) On admet que, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, $P(N_n = j) = \dfrac{1}{j!} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^i}{i!}$.
   Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,
$$\lim_{n\to+\infty} P(N_n = j) = P(N = j),$$
   où N est une variable aléatoire dont la loi est à déterminer.