Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \max(x, t)\ \mathrm{d}x$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que $f(t) = \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4}$ pour $0 \leq t \leq 1$. Représenter le graphe de f.

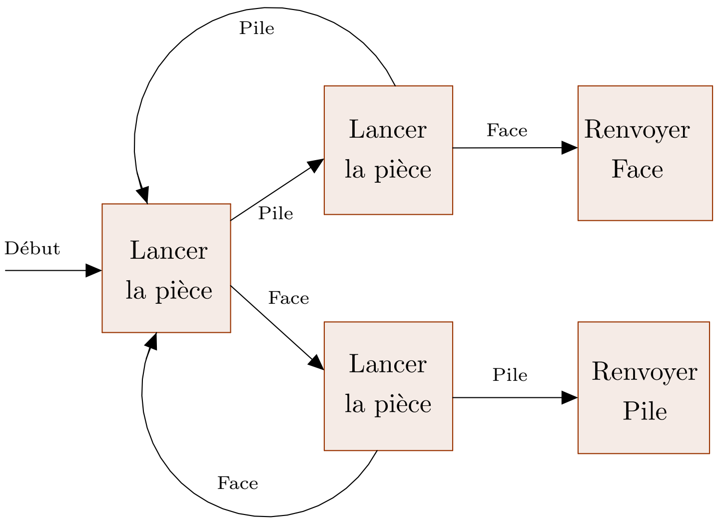
On définit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ par $a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout $n \geq 0$.

(2) Étudier la convergence de la suite (a_n).

(3) La fonction f est-elle de classe C^∞ ?

* * *

Exercice 2. On dispose d'une piècee truquée qui renvoie « pile » avec une probabilité $p \in]0,1[$ et on souhaite s'en servir pour générer un pile ou face équilibré. John von Neumann a imaginé l'algorithme suivant (où les lancers successifs de la piècee truquée se font indépendamment) :



On note $T \in \{2, 4, 6, \ldots\}$ la variable aléatoire donnée par le nombre de lancers nécessaires pour que l'algorithme se termine, et $R \in \{P, F\}$ le résultat de l'algorithme (où on note P pour « pile » et F pour « face »).

(1) Que valent T et R si on obtient comme premiers tirages $PPPPFFPPPFFP$?

(2) Démontrer que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(T = 2k) = \left(p^2 + (1-p)^2\right)^{k-1} 2p(1-p).$$

En déduire que l'algorithme se termine presque-sûrement, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.

(3) Démontrer que l'algorithme renvoie bien « pile » ou « face » avec même probabilité, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(R = \text{« pile »}) = 1/2$.

(4) Calculer $\mathbb{E}[T]$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. On rappelle qu'un projecteur d'un espace vectoriel E est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = u$. Soient $p, q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ deux projecteurs. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $p(x) = q(x)$.

(1) Calculer $(\mathsf{Id} - p \circ q) \circ p(x)$.

(2) Calculer $(p + q) \circ (\mathsf{Id} - p)(x)$.

(3) On suppose que $p + q$ et $\mathsf{Id} - p \circ q$ sont inversibles. Montrer que $p - q$ est inversible.

* * *

Exercice 2.

Première partie.

(1) Soit $x > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_x^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\, \mathrm{d}y$ converge et que

$$\int_x^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\, \mathrm{d}y \leq \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Indication. On pourra effectuer le changement de variable $y = x + z$.

Pour $0 < x < 1$, on rappelle que le quantile d'ordre $1 - x$ d'une loi gaussienne centrée réduite, noté Q_{1-x} est le plus petit nombre réel q tel que $\mathbb{P}(X \geq q) \leq x$, où X suit une loi gaussienne centrée réduite.

(2) Que vaut $\mathbb{P}\left(|X| \leq Q_{1-x/2}\right)$?

(3) Justifier que si $\mathbb{P}(X \geq q) \leq x$ alors $Q_{1-x} \leq q$.

(4) Montrer que si $\alpha > 0$ est suffisamment petit, on a

$$Q_{1-\alpha} \leq \sqrt{2 \ln\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\right)}.$$

Deuxième partie. On suppose avoir dépouillé n bulletins "représentatifs" lors d'une élection où deux candidates se présentent. On note $Z_i = 1$ si le i-ème bulletin est un vote pour la candidate A, $Z_i = 0$ s'il est pour la candidate B (on néglige les votes blancs et nuls). L'hypothèse de "représentativité" revient à supposer que les (Z_i) sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_A où p_A est la fraction (inconnue) de la population totale ayant voté pour la candidate A. Soit $S_n = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$ le nombre de voix obtenues par la candidate A.

(5) Soit σ_A^2 la variance de Z_1. Montrer que $\sigma_A^2 \leq 1/4$.

(6) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - np_A}{\sigma_A\sqrt{n}}\right| \leq Q_{1-\alpha/2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \alpha.$$

(7) En déduire un intervalle $I_{n,\alpha}$ dépendant de S_n, de n et de α tel que $\mathbb{P}(p_A \in I_{n,\alpha}) \geq 1 - \alpha$ "pour n assez grand". Combien environ de bulletins faut-il dépouiller pour avoir une précision de 10^{-2} sur l'estimation de p_A, avec une confiance asymptotique de 95% ?

On pourra utiliser le fait que $\ln(40/\sqrt{2\pi})$ *vaut environ* 2.8.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. On définit,pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

(1) Justifier que I_n est bien définie et montrer que $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$ pour tout $n \geq 1$.

(2) En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a

$$I_n = I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$

(3) Montrer que pour tout $0 < x \leq \frac{1}{2}$ on a $-\frac{3}{2}x \leq \ln(1-x) \leq -x$.

Indication : On pourra utiliser le fait que $e^{0.75}$ *vaut environ* 2.1

(4) Étudier la convergence de la suite (I_n).

On pose $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+t^2)^k}$ pour tout $t \geq 0$.

(5) Justifier que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\displaystyle\int_0^{\infty} f_n(t)dt = 2nI_{n+1}$.

(6) Étudier la convergence de la suite $\int_0^{\infty} f_n(t)dt$.

* * *

Exercice 2. Le but de cet exercice est d'étudier la somme des valeurs propres d'une matrice aléatoire.

Pour un entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes et à coefficients réels. Si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note M^{T} la transposée de M qui est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient placé à la ligne i et à la colonne j vaut $m_{j,i}$. On dit que M est symétrique si $M = M^{\mathsf{T}}$. La trace $\mathrm{Tr}(M)$ de M est définie par

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i}.$$

On note $\mathrm{S}(M)$ la somme des valeurs propres de M (éventuellement comptées plusieurs fois en fonction de leur multiplicité, la multiplicité d'une valeur propre étant la dimension de son sous-espace propre associé).

(1) Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) On suppose que M est diagonalisable. Montrer que $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{S}(M)$.

On suppose maintenant que M est une matrice dont les n^2 coefficients sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, donnée par

$$\mathbb{P}(M_{i,j} = -1) = \mathbb{P}(M_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(M_{i,j} = 0) = \frac{1}{3}$$

pour tous $1 \leq i, j \leq n$. On pose finalement

$$X = \frac{M + M^{\mathsf{T}}}{2}.$$

(3) Calculer $\mathbb{E}[\mathrm{S}(X)]$ et $\mathrm{Var}(\mathrm{S}(X))$, où $\mathrm{Var}(\mathrm{S}(X))$ désigne la variance de $\mathrm{S}(X)$.

On admettra que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est diagonalisable.*

(4) Calculer la limite de $\mathbb{P}(\mathrm{S}(X) \geq 0)$ lorsque $n \to \infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. On rappelle qu'un projecteur d'un espace vectoriel E est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u = u$.

Soient $p, n \geq 1$ deux entiers et soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ deux applications linéaires. On suppose que $g \circ f$ est un projecteur de rang p.

(1) Montrer que $\mathrm{rg}(g) \leq p$.

(2) En déduire que $\mathrm{Im}\, g \circ f = \mathrm{Im}\, g$ et que $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$.

(3) Montrer que $g(f(g(x))) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.

(4) Montrer que $f \circ g(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$.

* * *

Exercice 2. Soient $n, N \geq 1$ deux entiers. Une urne contient N boules, indiscernables au toucher, qui sont numérotées de 1 à N. On répète l'opération suivante n fois de manière indépendante : on tire au hasard une boule dans l'urne, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On note Z_k le numéro de la boule obtenue au k-ème tirage. L'objectif est d'estimer le nombre N de boules se trouvant dans l'urne, supposé inconnu.

(1) Soit $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$. Calculer l'espérance de S_n et en déduire un estimateur sans biais de N.

(2) Calculer la variance de l'estimateur obtenu.

On pourra utiliser le fait que $\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ *pour tout entier* $m \geq 1$.

On pose $M_n = \max(Z_1, \ldots, Z_n)$.

(3) Déterminer la loi de M_n.

(4) Montrer que $\mathbb{E}[M_n] = N - \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

(5) En déduire que $\mathbb{E}[M_n] \geq N - \frac{N}{n+1}$. Expliquer pourquoi on dit que M_n est un estimateur "asymptotiquement sans biais".

Indication. On pourra utiliser une comparaison avec une intégrale.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. On définit la suite (u_n) par $u_1 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}.$$

(1) Montrer que (u_n) converge.

(2) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

(3) Montrer que $u_n = \frac{a}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ avec une constante a à déterminer.

(4) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n u_n$?

* * *

Exercice 2.

Pour deux entiers $m, n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à m lignes, n colonnes et à coefficients réels. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes et à coefficients réels. Si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note M^T la transposée de M qui est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont le coefficient placé à la ligne i et à la colonne j vaut $m_{j,i}$. On voit les éléments de $\mathbb{R}^n$ comme des vecteurs colonnes (éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Première partie.

(1) Rappeler la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) En prenant pour $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ ainsi que pour $(Y_j)_{1\leq j\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, justifier que la famille $(X_iY_j^\mathsf{T})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet pour l'instant que, plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_n$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$, alors $(X_iY_j^\mathsf{T})_{1\leq i,j\leq n}$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cela sera démontré à la dernière question).

Deuxième partie. On fixe A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on définit l'application

$$\begin{aligned} \Phi_{A,B} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto AMB. \end{aligned}$$

(3) Soit M une matrice diagonalisable. Justifier que M^T est également diagonalisable.

(4) On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

Troisième partie.

(5) Si $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_n$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$, montrer que $(X_iY_j^\mathsf{T})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose

$$M_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

(1) Montrer que M_n admet une densité, qu'on déterminera et qu'on représentera graphiquement.

(2) Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty (1 - (1 - e^{-u})^n) \mathrm{d}u$ converge.

(3) Déterminer la valeur de la limite de $\frac{\mathbb{E}[M_n]}{\ln(n)}$ quand $n \to \infty$.
Indication. On pourra utiliser, sans preuve, le fait que $\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \geq u) \, \mathrm{d}u$ *pour toute variable aléatoire positive* Y *et faire un changement de variable dans l'intégrale.*

* * *

Exercice 2. Pour des endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^n$, on note $f \circ g$ la composée de f et g et $f^2 = f \circ f$. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$. Pour un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, soit (P_u) la propriété :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathsf{Id}) = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathsf{Id})^2\right).$$

Première partie. Soit f et g deux endormorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que $f \circ g = 0$.

(1) Montrer que $\mathrm{rg}(g) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f))$.

(2) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g)) \geq n$.

(3) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $(u - 2\mathsf{Id})^2 \circ (u + 3\mathsf{Id}) = 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}\left((u - 2\mathsf{Id})^2\right)$ et $\mathrm{Ker}\,(u + 3\mathsf{Id})$ sont supplémentaires.

(4) Si u vérifie de plus (P_u), montrer que u est diagonalisable.

Deuxième partie. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

(5) Soit u un endomorphisme diagonalisable. Montrer que u vérifie (P_u).

(6) Réciproquement, si u vérifie (P_u), est-ce que u est diagonalisable ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Pour un entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes et à coefficients réels. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. A est dite nilpotente d'indice 2.

(1) Donner une relation d'inclusion entre $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(A) \leq n/2$.

(2) Quelles sont les valeurs propres de A ? A est-elle diagonalisable ?

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit la matrice $J_k^{(n)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$(J_k^{(n)})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + k - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(3) On suppose uniquement dans cette question que $n = 4$.
Trouver tous les entiers k tels que $J_k^{(n)}$ soit nilpotente d'indice 2.

(4) On considère $C = [C_1 | \cdots | C_n]$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (où $C_1, \dots, C_n$ désignent les colonnes de C). Comment s'exprime la j-ème colonne de (CA) à partir des coefficients de A et des colonnes de C ?

(5) Soient $n \geq 5$ et $1 \leq k \leq n/2$ des entiers.
Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice 2 et de rang k.

* * *

Exercice 2. Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ des nombres réels tels que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. On pose

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i.$$

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}(|S| \geq c) \leq 2e^{-\frac{c^2}{2}}$.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$.
Indication. On pourra utiliser le fait que $e^u = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u^i}{i!}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

(2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tS} admet une espérance et que $\mathbb{E}\left[e^{tS}\right] \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

(3) Montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}(S \geq c) \leq e^{-\frac{c^2}{2}}$.
Pour une variable aléatoire positive Y admettant une espérance, on pourra utiliser le fait que $\mathbb{P}(Y \geq x) \leq \frac{1}{x}\mathbb{E}[Y]$ pour tout $x > 0$.

(4) En déduire que $\mathbb{P}(|S| \geq c) \leq 2e^{-\frac{c^2}{2}}$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels tels que $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$ pour tout $n \geq 0$.

(1) Montrer que $x_n > 0$ pour tout $n \geq 0$

(2) Montrer que x_n converge vers une limite qu'on déterminera.

(3) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge et calculer $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

* * *

Exercice 2. Pour des entiers $m, n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à m lignes, n colonnes et à coefficients réels. Si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note M^T la transposée de M qui est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont le coefficient placé à la ligne i et à la colonne j vaut $m_{j,i}$.

Soient $m, n \geq 1$ des entiers et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Première partie.

(1) Soit $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne. On suppose que $X^\mathsf{T} X = 0$. Montrer que $X = \mathbf{0}$, où $\mathbf{0}$ est le vecteur nul de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

(2) Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne tel que $A^\mathsf{T} AY = 0$. Montrer que $(AY)^\mathsf{T} AY = 0$.

(3) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\mathsf{T} A)$ puis que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AA^\mathsf{T}) = \mathrm{rg}(A^\mathsf{T} A)$.

Deuxième partie.

(4) Calculer AA^T et $A^\mathsf{T} A$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On suppose que AA^T est diagonalisable. Soit $X_1, \ldots, X_m$ une base de vecteurs propres de AA^T, numérotés de sorte que les r premiers vecteurs soient associés aux valeurs propres non nulles de AA^T.

(5) Montrer que $A^\mathsf{T} X_1, \ldots, A^\mathsf{T} X_r$ sont des vecteurs propres de $A^\mathsf{T} A$.

(6) Montrer que la famille $(A^\mathsf{T} X_1, \ldots, A^\mathsf{T} X_r)$ est libre.

(7) Montrer que $A^\mathsf{T} X_1, \ldots, A^\mathsf{T} X_r$ peut être complétée en une base dans laquelle $A^\mathsf{T} A$ est diagonale.

(8) Est-ce que AA^T et $A^\mathsf{T} A$ ont les mêmes valeurs propres ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{M\to\infty} (f(x+M) + f(y-M)) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

(1) Montrer que $2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
Indication. On pourra considérer la quantité $f(x+M) + f(y-M) + f(x-M) + f(y+M)$.

(2) Montrer que f est une fonction affine.

* * *

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier et $p_n \in]0,1[$. On construit au hasard des arêtes entre les entiers $1, 2, \ldots, n$ comme suit : pour $i \neq j$, avec probabilité p_n on place une arête entre i et j, et avec probabilité $1 - p_n$ on ne place pas d'arête entre i et j (on fait cela indépendamment pour toutes les paires $\{i, j\}$ avec $i \neq j$). Le but de cet exercice est d'estimer la probabilité qu'il existe un sommet isolé (c'est-à-dire qui n'est relié à aucun autre sommet). Notons S_n le nombre de sommets isolés, et posons $X_i = 1$ si i est isolé et $X_i = 0$ sinon (de sorte que $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$).

(1) Calculer la probabilité que 1 soit isolé et en déduire la valeur de $\mathbb{E}[X_1]$.

(2) Montrer que $\mathbb{E}[S_n] = n(1-p_n)^{n-1}$.

(3) Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq 1) \leq \mathbb{E}[S_n]$.

(4) Lorsque $p_n = c\frac{\ln(n)}{n}$ avec $c > 1$, montrer que $\mathbb{P}(S_n = 0) \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Le but est maintenant de démontrer que lorsque $p_n = c\frac{\ln(n)}{n}$ avec $c < 1$, alors $\mathbb{P}(S_n = 0) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

(5) Soit Y une variable aléatoire positive telle que Y^2 admet une espérance. En notant $\mathsf{Var}(Y)$ la variance de Y, montrer que

$$\mathbb{P}(Y = 0) \leq \frac{\mathsf{Var}(Y)}{\mathbb{E}[Y]^2}.$$

Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui affirme que pour tout $x > 0$ *on a* $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq x) \leq \frac{\mathsf{Var}(Y)}{x^2}$.

(6) Calculer $\mathbb{E}[S_n^2]$.

(7) Conclure que lorsque $p_n = c\frac{\ln(n)}{n}$ avec $c < 1$, on a $\mathbb{P}(S_n = 0) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $m \geq 2$ un entier.

(1) Soit $p \geq 0$ un nombre réel.

(a) Donnez le tableau de variation de la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mpx^{m-1} - (m-1)x^m$ pour $x \geq 0$.

(b) Montrer que

$$p^m = \sup_{x \geq 0}(mpx^{m-1} - (m-1)x^m).$$

Soit $N \geq 2$ un entier et $0 \leq p_1, \ldots, p_N \leq 1$ des nombres réels tels que tels que $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$.

(2) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^m \geq N^{1-m}.$$

(3) N condylures participent à m courses. On suppose que la probabilité que le i-ième condylure gagne la course est p_i, et que les résultats des différentes courses sont indépendants. Soit Q la probabilité qu'un même condylure gagne les m courses. Montrer que $Q \geq N^{1-m}$.

* * *

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Première partie. On définit l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}_n[X] & \to & (\mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]) \\ P & \mapsto & (P(0), P(X+1) - P(X)) \end{array}$$

(1) L'application Φ est-elle linéaire ?

(2) Montrer que Φ est injective.

(3) Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme P tel que $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = Q(X)$.

Deuxième partie. On définit la suite de polynômes $(P_k)_{k \geq 0}$ par $P_0 = 1$ et pour tout $k \geq 0$,

$$P_k(X) = P_{k+1}(X+1) - P_{k+1}(X) \quad \text{et} \quad P_{k+1}(0) = 0.$$

(4) Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(5) Montrer que $P_n(0) = P_n(1) = \cdots = P_n(n-1) = 0$ et que $P_n(n) = 1$.

(6) En déduire une expression de P_n.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Pour un entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes et à coefficients réels. On note Id la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice telle que $M^2 = -\mathsf{Id}$.

(1) La matrice M possède-t-elle des valeurs propres ?

(2) Quel est le rang de M ?

Soit x un vecteur non nul et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M.

(3) Montrer que $(x, u(x))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de u dans cette base.

(4) Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = -\mathsf{Id}$.

* * *

Exercice 2. Trois personnes gourmandes mais polies se trouvent face à trois desserts. Afin de déterminer qui va manger quel dessert, elle pointent simultanément le dessert qui leur ferait envie. Si un dessert n'a été pointé que par une seule personne, celle-ci le mange et va faire la sieste. Si un même dessert est choisi par plusieurs personnes, celles-ci répètent l'opération de choix, en pointant simultanément un nouveau dessert parmi ceux qui restent. On suppose les trois desserts excellents, donc chaque personne choisit un dessert uniformément au hasard et indépendament des choix des autres et de ses choix précédents.

On note $n = 1, 2, \ldots$ les instants des tentatives de choix de dessert.

(1) Soit X_n la variable aléatoire qui indique le nombre de personnes faisant la sieste après n tentatives. Donner la loi de X_1. Quel est le support de X_n ?

(2) Pour tout tous entiers $n, k, \ell \geq 0$ avec ℓ appartenant au support de X_n, calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = \ell)$.

(3) On pose $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $v_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

(4) En déduire la loi de X_n.

Indication. On pourra considérer la suite $w_n = 2^n v_n$

(5) On note T la durée (aléatoire) de cet échange de politesse, c'est-à-dire le nombre de tentatives au bout desquelles tout le monde a mangé son dessert. Quelle est l'espérance de T ?

Indication. on pourra exprimer $\mathbb{P}(\tau \geq n)$ en fonction de u_{n-1} et v_{n-1}.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier et soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose

$$m_n = \min(X_1, \ldots, X_n), \qquad M_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

(1) Déterminer la loi de m_n. Montrer que m_n admet une espérance et la calculer.

(2) Montrer que pour tout $0 < \epsilon < 1$ on a $\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\ln(n)} \leq 1 - \epsilon\right) \to 0$ quand $n \to \infty$.

(3) Montrer que pour tout $0 < \epsilon < 1$, on a $\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{\ln(n)} \geq 1 + \epsilon\right) \to 0$ quand $n \to \infty$.

(4) Montrer que pour tout $0 < \epsilon < 1$,

$$\mathbb{P}\left(1 - \epsilon < \frac{M_n}{\ln(n)} < 1 + \epsilon\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1.$$

* * *

Exercice 2.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2.$$

Indication. On pourra considérer le nombre complexe $z = \cos(x) + i\sin(x)$ et calculer z^2.

(2) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$ on a

$$\frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

(3) Pour un entier $n \geq 2$, on introduit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Montrer que $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Indication : on pourra considérer le nombre complexe $z = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(4) Trouver la limite de $\frac{S_n}{n}$ lorsque $n \to \infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f''(x) \geq 0$ pour tout $0 \leq x \leq 1$.

(1) Justifier que f' est croissante.

Première partie.

(2) Montrer que pour tout $0 \leq t \leq 1$ on a $f(t) \geq f'(1/2)(t-1/2) + f(1/2)$.

(3) Montrer que $f(1/2) \leq \int_0^1 f(s)ds$.

Deuxième partie.

(4) Montrer que pour tout $0 < t < 1$ on a

$$\frac{f(t)-f(0)}{t} \leq \frac{f(1)-f(t)}{1-t}.$$

(5) Montrer que $\int_0^1 f(s)ds \leq \frac{f(0)+f(1)}{2}$.

* * *

Exercice 2. Pour un entier $n \geq 0$, on note a_n le nombre de manières de lancer successivement une pièce n fois pour qu'un nombre impair de piles suivi d'un face survient pour la première fois au bout de n lancers.

(1) Calculer a_2, a_3, a_4, a_5.

(2) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$ on a $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

(3) Trouver une constante $c < 2$ telle que $a_n \leq c^n$ pour tout entier $n \geq 2$.

Soit M le nombre de fois qu'il faut, en moyenne, lancer une pièce sucessivement et indépendamment au hasard pour observer une suite d'un nombre impair de piles, suivi d'un face.

(4) Montrer que $M < \infty$.

(5) Que vaut M ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Soit $a > 2$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$ pour $n \geq 0$.

(1) Soit $g(x) = 2\sqrt{x-1} - x$ pour $x \geq 1$. Étudier le signe de g.

(2) Étudier la convergence de la suite (u_n).

(3) On pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

* * *

Exercice 2. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est stable par u si pour tout $x \in F$ on a $u(x) \in F$.

Première partie.

(1) Montrer qu'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs propres de u est stable par u.

(2) On suppose que u est diagonalisable et que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u. Montrer que F admet un supplémentaire stable par u.

Indication. On pourra utiliser le théorème de la base incomplète, qui affirme que si $\mathcal{L}$ est une partie libre de $\mathbb{R}^n$ et si $\mathcal{G}$ est une partie génératrice de $\mathbb{R}^n$, alors on peut compléter $\mathcal{L}$ avec des éléments de $\mathcal{G}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^n$.

Deuxième partie. On suppose dans cette partie que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ses valeurs propres et $E_1, \ldots, E_m$ les sous-espaces propres associés.

On considère F, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u tel que $F \neq \{0\}$. On note $\widehat{u} : F \to F$ l'endomorphisme défini par $\widehat{u}(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$.

Soit G un un supplémentaire de F stable par u. On pose, pour $1 \leq i \leq m$,

$$F_i = F \cap E_i, \qquad G_i = G \cap E_i.$$

(3) Montrer que $E_i = F_i \oplus G_i$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

(4) Montrer que

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m \qquad \text{et} \qquad G = G_1 \oplus G_2 \oplus \cdots \oplus G_m.$$

(5) Montrer que $\widehat{u}$ est diagonalisable.

(6) Montrer qu'il existe un vecteur propre x de u avec $x \in F$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. Pour un entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes et à coefficients réels. Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB = BA = 0$ et que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$.

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$.

(2) Montrer que $\mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.

(3) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\, A + \mathrm{Ker}\, B) = n$.

(4) Montrer que $\mathrm{Ker}(A + B) = \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B)$.

(5) Montrer que $\mathrm{rg}(A + B) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$.

* * *

Exercice 2. Selon Shakespeare, César dit à Brutus au moment de mourir : “Et tu, Brute ? Then fall, Cæsar !” Le but de cet exercice est d'estimer la probabilité p pour que vous inhaliez à cet instant l'une des molécules d'air exhalées par César prononçant cette ultime phrase.

Soit N le nombre de molécules d'air (supposé constant). Soit a le nombre de molécules d'air exhalées par César à l'instant ultime. On suppose que le nombre de molécules d'air que vous inhalez à cet instant vaut également a.

(1) Calculer la probabilité qu'une molécule d'air donnée ait été exhalée par César en fonction de a et N.

(2) Calculer $1 - p$ en fonction de a et N.

(3) Montrer que $-x - 2x^2 \leq \ln(1 - x) \leq -x$ pour tout $0 < x \leq 1/2$.

On suppose que N vaut environ 10^{44}, qu'il y a environ $6 \cdot 10^{23}$ molécules d'air dans 22.5 litres d'air, et qu'une inhalation ou une exhalation représentent 0.5 litres d'air. Par ailleurs, $e^{-1.77}$ vaut environ 0.17.

(4) Montrer que a vaut environ $\frac{4}{3} \cdot 10^{22}$ et estimer p.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est d'une heure ; l'interrogation durera une demi-heure environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez de dix minutes au maximum pour présenter vos résultats, sans intervention du jury (vous pouvez utiliser moins de dix minutes si vous le souhaitez). Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points cruciaux de votre raisonnement. Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera le cas échéant des indications.

Exercice 1. On dispose de $N+1$ urnes, numérotées de 0 à N. L'urne numérotée k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches. On choisit une urne uniformément au hasard. Sans connaître son numéro, on en tire une boule n fois de suite indépendamment, avec remise après chaque tirage.

On note U_i l'événement « l'urne tirée est l'urne de numéro i », A_i l'événement « les i premières boules tirées sont rouges » et B_i l'événement « la i-ième boule tirée est rouge ».

(1) Calculer $\mathbb{P}(U_i)$, $\mathbb{P}(A_n|U_i)$ et $\mathbb{P}(A_n)$.

(2) Quelle est la probabilité P_N que le $(n+1)$-ième tirage donne encore une boule rouge, sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules rouges ont été tirées ?

(3) Démontrer que

$$\int_0^N x^n \, \mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{N} i^n \leq \int_0^N (x+1)^n \, \mathrm{d}x.$$

(4) Calculer la limite de P_N lorsque n est fixé et $N \to \infty$.

* * *

Exercice 2. Pour un entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes et à coefficients réels. Si $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $[C,D]$ la matrice définie par $[C,D] = CD - DC$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est stable par une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si pour tout $x \in F$ on a $Cx \in F$. On dit que $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $(\mathcal{P})$ lorsque la propriété suivante est vérifiée :

« Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par C tel que $F \neq \{0\}$, alors il existe un vecteur propre x de C avec $x \in F$ ».

On suppose que A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(\mathcal{P})$.

(1) Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par A et par B, et tel que $ABx = BAx$ pour tout $x \in F$.

  (a) Montrer que A admet un vecteur propre $y \in F$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ la valeur propre associée à y. Montrer que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \cap F$ est stable par B.

  (b) En déduire qu'il existe un vecteur propre commun à A et à B.

On pose

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{pour tous } k, \ell \geq 1 \text{ on a } x \in \mathrm{Ker}[A^k, B^\ell]\}.$$

(2) Montrer N est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Le but de cet exercice est de montrer que $N \neq \{0\}$ si et seulement s'il existe un vecteur propre commun à A et à B.

(3) On suppose que x est un vecteur propre commun à A et à B. Montrer que $N \neq \{0\}$.

(4) Montrer que N est stable par A et par B.

(5) On suppose que $N \neq \{0\}$. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun à A et à B.