

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$. On notera $p = P(X = 1)$ ainsi que $q = P(X = 2)$ et $r = P(X = 3)$.

- (1) Donner une relation que p , q et r doivent nécessairement satisfaire.
- (2) Exprimer les espérances $E(X)$ et $E(X^2)$ en fonction de p , q et r .
- (3) On suppose désormais que $E(X) = 5/3$ et que la variance de X vaut $V(X) = 5/9$. On cherche à déterminer les trois paramètres p , q et r .
 - (3a) Expliciter un système linéaire à trois inconnues dont (p, q, r) est solution.
 - (3b) Trouver les valeurs de p , q et r .

Exercice 2. Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon \leq 1$. On se demande pour quelles valeurs strictement positives de c il est possible de trouver une fonction M non-nulle de classe C^2 telle que

$$\forall t \in]-1, 0[\quad M''(t) = -\frac{\varepsilon^2}{c^2} M(t) \quad (1)$$

et vérifiant de plus $M'(-1) = 0$ et $M'(0) = -\varepsilon^2 M(0)$.

- (1) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel ω pour que, pour tous réels A et B , la fonction

$$M(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

vérifie la relation (1). Dans la suite, on remplacera ω par la seule valeur positive vérifiant cette condition.

- (2) On suppose $M(0) \neq 0$. Montrer que la fonction M de la question précédente vérifie les conditions supplémentaires $M'(-1) = 0$ et $M'(0) = -\varepsilon^2 M(0)$ si et seulement si $\tan\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) = c\varepsilon$.
- (3) On rappelle que la fonction tangente est définie par la formule $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Tracer le graphe de $x \mapsto \tan(x)$ sur $[0, \frac{3\pi}{2}]$ ainsi que les graphes de $x \mapsto \frac{\varepsilon^2}{x}$ pour $\varepsilon^2 = 1$, pour $\varepsilon^2 = 0,1$ et pour $\varepsilon^2 = 0,01$.
- (4) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'équation $\tan(x) = \frac{\varepsilon^2}{x}$ a exactement deux solutions sur $[0, \frac{3\pi}{2}]$, qu'on notera dans l'ordre croissant x_ε et y_ε .
- (5) Montrer que les limites $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon$ existent et les déterminer.
- (6) On se donne une fonction f qui admet le développement limité suivant au voisinage de 0 : on a l'égalité $f(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + \varepsilon h(\varepsilon)$, avec $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon) = 0$. On suppose que $f(\varepsilon)$ vérifie l'équation obtenue en (2) pour la constante c : autrement dit, on a $\tan\left(\frac{\varepsilon}{f(\varepsilon)}\right) = f(\varepsilon)\varepsilon$. Déterminer les valeurs de a_0 et a_1 .

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Soient B et H deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On considère un rectangle dont la base est de longueur B et la hauteur est H .

- (1) Quelle est la probabilité d'obtenir un rectangle d'aire égale à 2 ?
- (2) Quelle est l'espérance de l'aire du rectangle obtenu ?
- (3) Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?

Exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on introduit la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par la formule $f_n(t) = (t/n)^n \exp(t+n)$.

- (1) Pour tout $n \geq 1$, montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- (2) Montrer que, pour tout $t > 0$ fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$ et que, pour $n \geq 1$ fixé, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_n(t) = +\infty$.
- (3) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} \quad \text{et que} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e.$$

- (4) Pour tout $n \geq 1$, établir qu'il existe un unique réel strictement positif t_n qui vérifie

$$\forall t \in]0, t_n[, f_n(t) > f_{n+1}(t) \quad \text{et} \quad \forall t \in]t_n, +\infty[, f_{n+1}(t) > f_n(t).$$

Donner une formule pour t_n .

- (5) Montrer que t_n/n converge vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
- (6) Regrouper les informations obtenues sur un dessin représentant l'allure des graphes des fonctions f_n .

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Les trois questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 2.

- (1) Rappeler sans démonstration les valeurs de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$.
- (2) Calculer la probabilité $P(4X \leq X^2 + 3)$.
- (3) Calculer l'espérance $E(\sin(X))$.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R}) \text{ telles qu'il existe des réels } a \text{ et } b \text{ tels que } M = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \right\}.$$

- (1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$. Déterminer sa dimension et trouver une base de E .
- (2) Montrer que si $M \in E$, alors pour tout entier $k \geq 0$, on a $M^k \in E$. On note a_k le coefficient sur la diagonale de M^k et b_k celui en dehors de la diagonale. Exprimer a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k, b_k, a_1, b_1 et n .

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $a_1 + nb_1 = 1$, ainsi que $a_1 \geq 0$ et $b_1 \geq 0$.

- (3) (3a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a l'égalité $a_{k+1} - b_{k+1} = (a_k - b_k)(a_1 - b_1)$.
- (3b) Montrer qu'à l'exception d'un cas particulier, $a_k - b_k$ converge vers 0 quand k tend vers $+\infty$.
- (4) (4a) Montrer que la suite $(a_k + nb_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est stationnaire, c'est-à-dire que la quantité $a_k + nb_k$ ne dépend pas de k .
- (4b) Déterminer la limite de M^k quand k tend vers $+\infty$. Autrement dit, déterminer les limites de a_k et b_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. On se donne $(X_1, X_2, X_3, \dots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/4$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k = X_1 + \dots + X_n$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $Z_n = (-1)^{S_n}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $p_n = P(Z_n = 1)$ et $q_n = P(Z_n = -1)$, et on considère le vecteur $v_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$. Enfin, on introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

- (1) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $v_{n+1} = Av_n$.
- (2) Pour tout $n \geq 1$, exprimer v_n en fonction de la matrice A et du vecteur v_1 dont on précisera les coordonnées.
- (3) Diagonaliser la matrice A .
- (4) En déduire, pour tout $n \geq 1$, une formule explicite pour v_n .
- (5) En déduire si $P(Z_n = 1)$ converge ou non quand n tend vers l'infini. Si oui, calculer la limite.

Exercice 2.

- (1) On considère les ensembles suivants :

$$H = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \Im(z) > 0\} \quad \text{et} \quad D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < 1\},$$

où $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de z . Représenter graphiquement ces deux ensembles.

- (2) Montrer que pour tout $z \in H$, le nombre complexe $\frac{1+iz}{z+i}$ est bien défini et appartient à D .
- (3) Montrer que la fonction définie sur H et à valeurs dans D donnée par la formule $\frac{1+iz}{z+i}$ est une bijection. Quelle est sa fonction réciproque ?
- (4) On remplace les inégalités strictes par des inégalités larges dans les définitions de H et D . La fonction est-elle encore bijective ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Un lycée comporte 4 classes de terminale, numérotées de 1 à 4. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note n_i le nombre d'élèves de la classe n° i . On note $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ le nombre total d'élèves de terminale du lycée. On suppose naturellement que N n'est pas égal à zéro.

- (1) On définit une variable aléatoire X par la procédure suivante : on choisit l'un des quatre numéros de classe uniformément au hasard, puis X renvoie le nombre d'élèves que comporte cette classe. Exprimer l'espérance de X en fonction de n_1, n_2, n_3 et n_4 .
- (2) On définit une variable aléatoire Y par la procédure suivante : on choisit parmi les N élèves de terminale une personne uniformément au hasard, puis Y renvoie le nombre d'élèves que comporte la classe de cette personne. Exprimer l'espérance de Y en fonction de n_1, n_2, n_3 et n_4 .
- (3) Démontrer que l'espérance de Y est supérieure ou égale à l'espérance de X . Ce résultat vous paraît-il intuitif ?

Exercice 2. On considère une boîte en carton de volume 1 mètre cube, sans couvercle, dont la base rectangulaire a pour dimensions x et y , en mètres. On cherche les valeurs possibles de la surface totale des cinq parois de la boîte.

- (1) Montrer que cela revient à étudier la fonction

$$f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$$

sur l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ tels que } x > 0 \text{ et } y > 0\}$.

- (2) Montrer que f peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut sur A .
- (3) Démontrer que f admet un et un seul point critique dans A . Déterminer ce point critique.
- (4) Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de f .
- (5) Soit a un réel strictement positif. Montrer que pour tout $t \in]-a, +\infty[$, $\frac{1}{a+t} \geq \frac{1}{a} - \frac{t}{a^2}$ et en déduire que

$$\forall (x, y) \in A, \quad f(x, y) \geq 3 \times 2^{2/3}.$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Soit n un entier strictement positif. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$. Étant donné un endomorphisme u , on note $\text{Ker}(u)$ son noyau et $\text{Im}(u)$ son image.

- (1) On suppose dans cette question que n est un entier pair, qu'on écrit sous la forme $n = 2k$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, on pose $e'_i = e_i + e_{k+i}$. On note $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$, $E_2 = \text{Vect}(e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{2k})$ et $E_3 = \text{Vect}(e'_1, e'_2, \dots, e'_k)$.

(1a) Établir que $\mathbf{R}^n = E_1 \oplus E_2$.

(1b) Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_k, e'_1, e'_2, \dots, e'_k)$ est une base de $\mathbf{R}^n$ et en déduire que $\mathbf{R}^n = E_1 \oplus E_3$.

On admettra qu'on a également $\mathbf{R}^n = E_2 \oplus E_3$. On note u la projection sur E_2 parallèlement à E_1 (parfois appelée « projection sur E_2 de direction E_1 »). On note v la projection sur E_3 parallèlement à E_2 . Enfin, on note w la projection sur E_1 parallèlement à E_3 .

(1c) Quelles sont les matrices de u , v et w dans la base $(e_1, \dots, e_n)$?

(1d) Démontrer qu'on a $\text{Im}(u) = \text{Ker}(v)$, $\text{Im}(v) = \text{Ker}(w)$ et $\text{Im}(w) = \text{Ker}(u)$.

- (2) On suppose désormais que n est un nombre impair. Démontrer par l'absurde qu'il est impossible qu'il existe trois endomorphismes u , v et w de $\mathbf{R}^n$ tels qu'on ait à la fois $\text{Im}(u) = \text{Ker}(v)$, $\text{Im}(v) = \text{Ker}(w)$ et $\text{Im}(w) = \text{Ker}(u)$.

Exercice 2. On se donne un entier $n \geq 1$ et X_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $1/2$. Si besoin, on pourra utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(a+b)^n$ à l'aide des coefficients binomiaux pour a et b des nombres complexes.

- (1) (1a) Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(1b) Calculer, en fonction de la parité de n , la probabilité $P(X_n \leq n/2)$.

- (2) (2a) Montrer que, pour tout entier k , la partie réelle de i^k est égale à $\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

(2b) Calculer l'espérance $E(\cos(\pi X_n/2))$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. On se donne un dé à 4 faces, numérotées 1, 2, 3 et 4. Ce dé n'est pas forcément équilibré : chaque face $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ a une certaine probabilité notée $a_i > 0$ d'être tirée. On modélise cela par $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ et P la probabilité associée. On s'intéressera aux événements $A = \{1, 3\}$ et $B = \{1, 2\}$.

On introduit les vecteurs $x = (\sqrt{a_1}, 0, \sqrt{a_3}, 0)$ et $y = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, 0, 0)$. On considère D la droite de $\mathbf{R}^4$ engendrée par le vecteur $z = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \sqrt{a_4})$. Enfin, on note π la projection orthogonale sur D .

- (1) Exprimer la probabilité conditionnelle d'avoir A sachant l'événement B en fonction de (a_1, a_2, a_3, a_4) .
- (2) Combien vaut la norme du vecteur z ? Autrement dit, calculer $\|z\|$.
- (3) Calculer $\pi(x)$ et $\pi(y)$. On exprimera les résultats en fonction des coefficients a_i et de z .
- (4) Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si les vecteurs $x - \pi(x)$ et $y - \pi(y)$ sont orthogonaux.

Exercice 2. On considère A l'ensemble des fonctions continues définies sur $[-1, 1]$, à valeurs réelles et vérifiant :

$$f(-1) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [-1, 1], \quad |f(x)| \leq 1.$$

On note B l'ensemble des fonctions de classe C^1 définies sur $[-1, 1]$, à valeurs réelles et vérifiant :

$$f(-1) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [-1, 1], \quad |f'(x)| \leq 1.$$

Notez bien que l'inégalité porte sur $|f|$ dans la définition de A mais sur $|f'|$ dans la définition de B .

- (1) (1a) Montrer que, pour tout $f \in A$, on a l'inégalité $\int_{-1}^1 |f(x)| dx \leq 2$.
 (1b) Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n(x) = 1 - x^{2n}$. Montrer que f_n appartient à A . Calculer $I_n = \int_{-1}^1 |f_n(x)| dx$. Cette suite converge t-elle ?
- (2) (2a) Montrer que si f appartient à B alors, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $|f(x)| \leq 1$.
 (2b) Démontrer que si f appartient à B , alors on a

$$\forall x \in [-1, 1], \quad -1 + |x| \leq f(x) \leq 1 - |x|.$$

On commencera par illustrer cette propriété grâce à un dessin.

- (2c) En déduire que, pour tout $f \in B$, on a l'inégalité $\int_{-1}^1 |f(x)| + |f'(x)| dx \leq 3$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Un festival de danse propose en parallèle trois cours, de niveau 1, 2 et 3. Le lundi, on suit un et un seul cours : le cours 1 avec une certaine probabilité p_1 , le cours 2 avec une probabilité p_2 et le cours 3 avec une probabilité p_3 . Si on est au niveau 3 le lundi, on y reste pour le mardi. Si on est au niveau 1 ou 2 le lundi, on a une chance sur deux de rester au même niveau le mardi, et une chance sur deux de monter au niveau immédiatement supérieur. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note q_i la probabilité que le cours suivi le mardi soit le n° i . On introduit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Justifier que $Au = v$.
- (2) Si on est libre de choisir les p_i comme on veut, est-il possible d'avoir $q_1 = \frac{1}{3}$?
- (3) Calculer l'inverse de la matrice A .
- (4) Est-il possible d'avoir $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$?

Exercice 2. On construit aléatoirement un intervalle de la manière suivante. On tire tout d'abord son milieu M selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On tire ensuite la longueur totale L de l'intervalle, qui est indépendante de M et suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$. On note $[X, Y]$ l'intervalle aléatoire ainsi produit.

- (1) Expliquer rapidement pourquoi $X = M - \frac{L}{2}$ et $Y = M + \frac{L}{2}$.
- (2a) Calculer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.
- (2b) Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$.

On introduit Z la variable aléatoire qui vaut 1 quand $X > 0$ et qui vaut 0 quand $X \leq 0$.

- (3) Calculer $P(Z = 0)$. En déduire la loi de Z et son espérance.
- (4) Montrer que pour tous réels y et z , il y a au plus un choix de (λ, μ) qui vérifie $E(Y) = y$ et $E(Z) = z$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. Dans tout l'exercice, on associera à chaque $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ le graphe de fonction obtenu en reliant par un segment le point de coordonnées $(0, z_0)$ au point de coordonnées $(1, z_1)$, puis $(1, z_1)$ à $(2, z_2)$, et ainsi de suite jusqu'au dernier segment joignant $(n-1, z_{n-1})$ à (n, z_n) .

On introduit les trois vecteurs de $\mathbf{R}^{n+1}$ suivants :

$$u = (1, 1, 1, \dots, 1)$$

$$w = (0, 1, 2, \dots, n)$$

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_n).$$

Enfin, on désigne par $\text{Vect}(\dots)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{n+1}$ engendré par le ou les vecteurs listés entre les parenthèses.

- (1) Avec la représentation graphique expliquée en début d'énoncé, tracer plusieurs éléments de $\text{Vect}(u)$ et plusieurs éléments de $\text{Vect}(w)$. Décrire $\text{Vect}(u)$ et $\text{Vect}(w)$.
- (2) Déterminer le projeté orthogonal de y sur $\text{Vect}(u)$.
- (3) On cherche deux réels α et β et un vecteur $z \in \text{Vect}(u, w)^\perp$ tels que $y = \alpha u + \beta w + z$. Déterminer un système linéaire à deux équations vérifié par (α, β) et montrer qu'il admet une unique solution. Si besoin, on pourra utiliser sans démonstration la formule $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- (4) On considère $f(a, b) = \sum_{k=0}^n (a + bk - y_k)^2$. Montrer que f admet un unique point critique. Que remarque-t-on ? Commenter géométriquement ce résultat.

Exercice 2. Soit λ un réel strictement positif, soit n un entier strictement positif. On considère $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Poisson de paramètre λ . On définit la variable aléatoire $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

- (1) Exprimer l'espérance et la variance de M_n en fonction de λ et de n . On pourra utiliser sans justification les valeurs de l'espérance et de la variance de X_1 .
- (2) Calculer l'espérance de $X_1(X_1 - 1)(X_1 - 2)$.
- (3) On cherche un nombre réel a tel que la probabilité que λ appartienne à l'intervalle $[M_n - a, M_n + a]$ soit supérieure ou égale à $\frac{99}{100}$.
 - (3a) Démontrer que cela revient à montrer une inégalité qu'on précisera sur $P(|M_n - \lambda| > a)$.
 - (3b) Donner une expression de a qui convient. Cette valeur de a pourra dépendre de n et de λ .
- (4) On suppose l'inégalité $\lambda \leq 100$. Trouver un réel b qui ne dépend ni de λ ni de n tel que la probabilité que λ appartienne à l'intervalle $\left[M_n - \frac{b}{\sqrt{n}}, M_n + \frac{b}{\sqrt{n}}\right]$ soit supérieure ou égale à $\frac{99}{100}$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. On considère la fonction d'une variable réelle $f(x) = x - e^{-\frac{1}{x}}$.

- (1) On rappelle que $e = \exp(1)$ appartient à l'intervalle $]2, 3[$. En déduire que $e^{-2} < \frac{1}{4}$.
- (2) Déterminer le domaine de définition de f et, si elles existent, ses limites en $-\infty$ et $+\infty$. Si un ou plusieurs réels n'appartiennent pas au domaine de définition, pour chacun d'entre eux, déterminer la limite à gauche et la limite à droite de f en ce point.
- (3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ puis que $f'(x) = 1 - g\left(\frac{1}{x}\right)$ pour une certaine fonction g qu'on précisera.
- (4) Dresser le tableau de variations de $u \mapsto g(u)$ et montrer qu'il existe un unique réel c tel que $g(c) = 1$.
- (5) Établir que f est positive sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2. Soit $n \geq 2$. On considère une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la forme suivante

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 0 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des réels. On note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

- (1) Montrer que la famille $(e'_1, e'_2, e'_3, \dots, e'_n) = (e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2, \dots, e_n - e_{n-1})$ est une base de $\mathbf{R}^n$.
- (2) Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, calculer $u(e'_i)$.
- (3) En fonction des valeurs des a_i , déterminer les dimensions du noyau et de l'image de u et proposer une base de ces sous-espaces vectoriels.
- (4) Les coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont dorénavant tirés aléatoirement. Plus précisément, on fixe un réel $p \in [0, 1]$ et les a_i sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . Déterminer la loi du rang de M . En déduire l'espérance du rang de M .
- (5) Soient $\alpha \in]0, 1]$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, le réel $p_n = \alpha - \beta n^{-\gamma}$ appartient à l'intervalle $[0, 1]$. On reprend le contexte de la question précédente, en choisissant pour valeur de p le nombre p_n . Par exemple, pour $n = 3$, les variables aléatoires a_1, a_2 et a_3 sont indépendantes et chacune de loi de Bernoulli de paramètre p_3 . Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité de l'événement « la matrice est inversible ».

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. On pose P le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, -1, 0)$ et $(0, 1, -1)$. On note D l'orthogonal de P .

(1) (1a) Montrer que P est de dimension 2.

(1b) Expliciter une base de D .

On note f la symétrie par rapport à D le long de P , c'est-à-dire la symétrie relative à la décomposition en somme directe $\mathbf{R}^3 = D \oplus P$ et laissant fixe la droite D . On notera M la matrice de f dans la base canonique. On n'aura jamais besoin de calculer cette matrice M .

(2) (2a) Soit $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On note g l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N . Montrer que g est une symétrie.

(2b) On note h l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est NMN . Démontrer, sans calculer M , que h est une symétrie.

(3) (3a) Déterminer les sous-espaces vectoriels E et F tels que g soit la symétrie par rapport à E le long de F .

(3b) Déterminer, sans calculer la matrice M , les sous-espaces vectoriels E' et F' tels que h soit la symétrie par rapport à E' le long de F' .

Exercice 2. Soit $(u_1, u_2, u_3, \dots)$ une suite de réels positifs décroissante telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(1) Donner, sans justification, deux exemples de suites vérifiant les hypothèses ci-dessus, l'un où la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge et l'autre où cette série diverge.

(2) Pour tout entier $k \geq 0$, on note $w_k = \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} u_j$. Montrer que cette somme contient 2^k termes. Soit $N \geq 1$.

Trouver deux entiers p et q tels que $\sum_{n=1}^{2^N-1} u_n = \sum_{k=p}^q w_k$.

(3) Établir que, pour tout $N \geq 1$, on a $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N 2^k u_{2^k} \leq \sum_{n=1}^{2^N-1} u_n \leq \sum_{k=0}^{N-1} 2^k u_{2^k}$.

(4) Soit β un réel strictement positif. En appliquant le résultat précédent à $u_n = \frac{1}{n (\ln(2n))^\beta}$, démontrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. On considère E l'ensemble de toutes les fonctions g de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur $\mathbf{R}$ vérifiant la condition suivante :

$$\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad g(x) = \alpha + \beta \sin(x) + \gamma \sin(x)^2.$$

Autrement dit, E est l'ensemble des combinaisons linéaires qu'on peut former à partir des fonctions $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sin(x)$ et $f_2(x) = \sin(x)^2$.

- (1) Évaluer la fonction $x \mapsto \alpha + \beta \sin(x) + \gamma \sin(x)^2$ en trois points donnant des valeurs différentes pour $\sin(x)$. En déduire que si cette fonction est nulle, on a nécessairement $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
- (2) On considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par $\varphi : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ -4\gamma \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice de cette application (dans la base canonique) est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres.
- (3) Montrer que, pour tout $g \in E$, la fonction g'' est aussi un élément de E .
- (4) Trouver l'ensemble des éléments g de E tels que $g'' + 2g = 0$.
- (5) Quel est le lien entre la question 2 et le reste de l'exercice ?

Exercice 2. Soit $b \in]0, 1[$. On considère la fonction polynomiale $p(x) = x(x - b)(1 - x)$.

- (1) A priori, combien l'équation $p'(x) = 0$ peut-elle avoir de solutions au maximum ? Sans faire de calculs, établir l'existence de deux réels distincts $\alpha \in]0, b[$ et $\beta \in]b, 1[$ tels que $p'(\alpha) = p'(\beta) = 0$.
- (2) Quelle est l'allure du graphe de p ? En faire un dessin où apparaissent α et β .
- (3) Soit $u \in]p(\alpha), p(\beta)[$. Montrer que l'équation $p(x) = u$ admet exactement trois solutions et discuter leurs positions par rapport 0, b et 1.
- (4) On considère la suite définie par $y_0 \in]0, b[$ et la relation $y_{n+1} = y_n + p(y_n)$ valable pour tout entier $n \geq 0$. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $0 < y_{n+1} < y_n$.
- (5) Montrer que la suite $(y_0, y_1, y_2, \dots)$ converge vers un réel à déterminer.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes ; l'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée est de 10 à 15 minutes ; vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $a_n = 2 \cos(2^{-n-1}\pi)$ et pour $n \geq 1$, $b_n = 2/a_n$.

- (1) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
- (2) Pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, écrire a_n sous la forme d'une expression faisant intervenir des racines carrées, des additions et le nombre 2.
- (3) Établir par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a l'égalité

$$\sin(2^{-n-1}\pi) \prod_{k=1}^n a_k = \sin(\pi/2) = 1.$$

- (4) Montrer que $2^n \sin(2^{-n}\pi)$ converge quand n tend vers l'infini vers un nombre qu'on précisera.
- (5) En déduire que $2 \prod_{k=1}^n b_k$ converge quand n tend vers l'infini vers un nombre qu'on précisera.

La question 5 établit un résultat découvert par François Viète, mathématicien du seizième siècle.

Exercice 2. Alice et Bob jouent à pierre-feuille-ciseaux. Chacun choisit l'un des trois signes de façon cachée puis les signes sont révélés. Si les signes révélés sont feuilles-ciseaux, la personne ayant choisi les ciseaux a un score de 3 points et l'autre un score (négatif) de -3 points. En cas de duel pierre-ciseaux, la personne ayant choisi la pierre a un score de 2 points et l'autre -2 points. Lors d'un duel pierre-feuille, la personne ayant choisi la feuille a 1 point et l'autre -1 point. Enfin, si Alice et Bob choisissent le même signe, chacun marque 0 point.

On se donne p, f et c trois réels dans $[0, 1]$ tels que $p + f + c = 1$. La stratégie d'Alice consiste à choisir la pierre avec probabilité p , la feuille avec probabilité f et les ciseaux avec probabilité c . De même, on se donne p', f' et c' trois réels dans $[0, 1]$ tels que $p' + f' + c' = 1$ et la stratégie de Bob consiste à choisir la pierre avec probabilité p' , la feuille avec probabilité f' et les ciseaux avec probabilité c' . Ces choix sont effectués de façon indépendante. Enfin, on introduit la matrice et les vecteurs suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} p \\ f \\ c \end{pmatrix} \quad v' = \begin{pmatrix} p' \\ f' \\ c' \end{pmatrix}.$$

- (1) Exprimer le produit scalaire de v' et Mv en fonction de p, f, c, p', f', c' .
- (2) Calculer l'espérance du score d'Alice et montrer qu'elle est égale au produit scalaire de v' et Mv .
- (3) Trouver une base du noyau de M .
- (4) Démontrer qu'il existe une unique stratégie (p, f, c) pour Alice qui est telle que l'espérance de son score soit nulle quelle que soit la stratégie (p', f', c') de Bob. Déterminer cette stratégie.
- (5) Si Alice applique une stratégie autre que celle de la question précédente, montrer qu'il existe une stratégie pour Bob telle que l'espérance du score d'Alice soit strictement négative et qu'il existe une stratégie pour Bob telle que l'espérance du score d'Alice soit strictement positive.