



ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE 1

Soient a et b deux réels, $a \neq 0$,

on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$ et on note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Q1.** Quel est le rang de la matrice J ? Diagonaliser la matrice J sans calculer de déterminant. On ne demande pas la matrice de passage.
- Q2.** En déduire que la matrice A est semblable à une matrice diagonale que l'on précisera.
- Q3.** Justifier, sans calculs, que le polynôme minimal de la matrice A est : $\pi_A = (X - b)(X - 3a - b)$.
- Q4.** Déterminer les puissances successives de A par deux méthodes différentes :
- a) En déterminant le reste dans la division euclidienne de X^n par le polynôme $\pi_A = (X - b)(X - 3a - b)$.
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices A et I .
Pour simplifier les calculs, on posera $\lambda = 3a + b$ et on pourra laisser λ dans la réponse.
- b) Calculer J^k pour tout entier $k \geq 1$, puis utiliser $A = aJ + bI$.
On pourra laisser la réponse en fonction des matrices J et I (sans le signe somme).

EXERCICE 2

Dans cet exercice n est un entier naturel non nul.

On note $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme de degré $n - 1$ à coefficients réels.

On note, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ les n racines n -ièmes de l'unité.

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant :

(*) le produit $P(\omega_1)P(\omega_2)\dots P(\omega_{n-1})$ est un nombre réel.

Q5. Exemple.

Si on note $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$, déterminer ce que vaut $1 + j + j^2$.

Choisir un polynôme de votre choix de degré 2 à coefficients réels tous non nuls et tous différents et vérifier le résultat (*).

Q6. On note la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(chaque ligne et chaque colonne contient un et un seul 1).

Démontrer que le polynôme caractéristique de la matrice J est $\chi_J = X^n - 1$.

Q7. On note $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdot & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdot & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

(les coefficients du polynôme P se trouvent sur la première ligne, puis sur les lignes suivantes avec un « décalage d'une case vers la droite »).

Comparer la matrice A et la matrice $P(J)$ (on ne demande pas le détail des calculs).

Q8. Diagonaliser la matrice J dans $M_n(\mathbb{C})$ (on ne demande pas la matrice de passage), puis diagonaliser la matrice A dans $M_n(\mathbb{C})$.

Q9. En déduire le résultat (*).

PROBLÈME

Q10. Question de cours.

Si E est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et de sa norme euclidienne associée notée $\| \cdot \|$, si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , on définit le projeté orthogonal sur F d'un vecteur x de E noté $p_F(x)$ ainsi :

$p_F(x)$ est l'unique vecteur de F vérifiant $x - p_F(x) \in F^\perp$.

a) Si $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F , démontrer que $p_F(x) = \sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle e_i$.

b) Démontrer que pour tout vecteur x de E , $\|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ et que $\sum_{i=0}^n \langle x | e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Q11. Justifier que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

On note désormais $F = \mathbb{R}_n[X]$, $I = [0, +\infty[$ et E l'ensemble des fonctions continues de I dans \mathbb{R} , telles que la fonction $t \mapsto (f(t))^2 e^{-t}$ soit intégrable sur l'intervalle I .

Justifier que pour f et g dans E , la fonction $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est intégrable sur l'intervalle I .

Q12. Démontrer que E est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt.$$

Q13. On identifie $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales sur \mathbb{R} . Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E .

Ainsi $\langle \cdot | \cdot \rangle$, défini sur $\mathbb{R}[X]$, par $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout réel x ,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

a) Calculer pour tout entier naturel $p \leq n$, $h_n^{(p)}(x)$.

Si $p < n$, que vaut $h_n^{(p)}(0)$?

b) Démontrer que $L_n \in \mathbb{R}[X]$, préciser son degré et son coefficient dominant.

Q15. Soit g élément de $\mathbb{R}[X]$, exprimer $\langle g | h_n^{(n)} \rangle$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) dt$, puis exprimer

$\langle g | L_n \rangle$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt$.

Q16. Si L_i et L_j , avec $i < j$, sont deux éléments de F , déterminer $\langle L_i | L_j \rangle$.

Q17. Calculer par des intégrations par parties, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\langle L_n | L_n \rangle$.

Q18. Que peut-on en conclure concernant la base $(L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$ de vecteurs de F ?

Exprimer, pour tout g élément de E , $P_F(g)$ dans cette base.

Q19. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} \langle g | L_n \rangle^2$ converge et majorer $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g | L_n \rangle^2$.

Q20. Pour $\alpha > \frac{-1}{2}$, on pose $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$.

Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $g_\alpha \in E$.

Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g_\alpha | L_n \rangle^2 = \|g_\alpha\|^2$.

FIN