

EXERCICE 1

Un jeu de pile ou face

Préliminaires

Q1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe \mathcal{C}^k sur $] -1, 1[$, et que pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Q2. Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in] -1, 1[$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

Étude d'un jeu de Pile ou Face

Soit $p \in]0, 1[$. Deux joueurs effectuent des lancers indépendants d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est p . Le jeu se déroule de la manière suivante.

- Le joueur 1 effectue une succession de lancers et s'arrête lorsqu'il obtient *Pile* pour la première fois.
On admettra qu'avec une probabilité de 1, le joueur obtient Pile après un nombre fini de lancers.
- Le joueur 2 effectue ensuite le même nombre de lancers que le joueur 1 et compte le nombre de fois où il a obtenu *Pile*.

On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

- On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers effectués par le joueur 1.
- On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de *Pile* obtenus par le joueur 2.

Q3. Préciser la loi de X .

Q4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité de l'événement $\{Y = k\}$ sachant $\{X = n\}$, notée par la suite $P(Y = k | X = n)$.

Q5. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, exprimer $P(Y = k)$ en fonction des réels $P(Y = k | X = n)$ et $P(X = n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

↳ Q6. Établir que : $P(Y = 0) = \frac{1-p}{2-p}$.

↳ Q7. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $P(Y = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$.

EXERCICE 2

Une caractérisation de la fonction Gamma

L'objet de cet exercice est l'étude d'une caractérisation de la fonction Gamma connue sous le nom de théorème de Bohr-Mollerup.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant.

Lemme 1. Si g est une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$, alors pour tous x, y éléments de $I \setminus \{a\}$ tels que $x \leq y$,

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq \frac{g(y) - g(a)}{y - a}.$$

Dans cet exercice, nous cherchons à montrer que la seule fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = xf(x) \\ f(1) = 1 \\ \ln \circ f \text{ est une fonction convexe} \end{cases} \quad (S)$$

est la fonction Γ , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Existence : la fonction Γ vérifie (S)

Q8. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur \mathbb{R}_+^* et que $\Gamma(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Q9. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans les questions **Q10** à **Q12**, a et b désignent des réels vérifiant $0 < a < 1 < b$ et φ désigne la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1] \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}.$$

Q10. Établir que :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*, t^{x-1} e^{-t} \leq \varphi(t).$$

Q11. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, on définit la fonction ψ_k sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \psi_k(t) = |\ln t|^k \varphi(t).$$

Montrer que les fonctions ψ_k ($k \in \{0, 1, 2\}$) sont intégrables sur \mathbb{R}_+^* .

Q12. Dédurre des deux questions précédentes que la fonction Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* . Donner l'expression des deux fonctions Γ' et Γ'' sous une forme intégrale.

Q13. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\alpha < \beta$. Pour tout couple (u, v) de fonctions continues sur $[\alpha, \beta]$, on pose :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} u(t)v(t) dt.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([\alpha, \beta])$.

Q14. En utilisant la question **Q13** et en ayant recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x).$$

En déduire que la fonction $\ln \circ \Gamma$ est convexe et conclure que Γ vérifie bien (S).

Unicité

On suppose que f est une fonction de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* qui vérifie (S). On introduit par ailleurs la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \ln(f(x)).$$

Q15. Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(x+n) = x(x+1)\dots(x+n-1)f(x).$$

En déduire les valeurs de $f(n+1)$ et de $g(n+1)$.

Q16. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, g(x+n+1) = g(x) + \ln(x(x+1)\dots(x+n)).$$

Q17. À l'aide du Lemme 1, justifier que :

$$\forall x \in]0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, g(n+1) - g(n) \leq \frac{g(x+n+1) - g(n+1)}{x} \leq g(n+2) - g(n+1).$$

Q18. À l'aide des questions **Q16** et **Q17**, établir que :

$$\forall x \in]0, 1], f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \quad (1)$$

Q19. Déduire des questions **Q14** et **Q18** que pour tout $x \in]0, 1]$, $f(x) = \Gamma(x)$.

Q20. En utilisant la question **Q15**, conclure que $f = \Gamma$.

Objectif du problème

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés de l'ensemble \mathcal{D} . Après avoir étudié deux exemples dans la partie I, on étudie dans la partie II les endomorphismes nilpotents de \mathcal{D} . Dans la partie III, on démontre un critère d'appartenance à \mathcal{D} faisant intervenir des polynômes annulateurs.

Partie I - Deux exemples

Dans cette partie, on note $E = \mathbb{K}_2[X]$. On définit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$u : E \rightarrow E \quad \text{et} \quad v : E \rightarrow E \\ P \mapsto X^2 P'' + P' \quad \quad \quad P \mapsto P'$$

Étude de u

Q21. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$. Est-elle diagonalisable ?

Q22. Déterminer $\text{Ker } u^2$ et justifier que $\text{Ker } u^2$ est un sous-espace vectoriel stable par u .

Q23. Donner une base \mathcal{B} de E dans laquelle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et conclure que $u \in \mathcal{D}$.

Étude de v

Q24. Donner la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Q25. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension 1 stables par v .

Q26. Montrer que $\mathbb{K}_1[X]$ est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 2 stable par v .

Q27. En déduire que $v \notin \mathcal{D}$.

Q28. \mathcal{D} est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?

Partie II - Le cas des endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k vérifiant $u^k = 0$ est appelé indice de nilpotence de u .

Dans la suite, on note \mathcal{N} l'ensemble des endomorphismes de E nilpotents et on pose :

$$\mathcal{N}_2 = \{u \in \mathcal{L}(E) : u^2 = 0\}.$$

Dans toute cette partie, $u \in \mathcal{N}$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ et de rang $r \in \mathbb{N}$.

On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$.

Cas $n = 1$

Q29. Que dire de u si $\dim E = 1$?

Cas $n = 2$

On suppose dans ce cas que $\dim E = 2$ et que u est non nul.

Q30. Soit $x \in E$ tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$. Justifier que $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \dots, u(x), x)$ est une famille libre.

Q31. En déduire que $k = 2$, puis que $u \in \mathcal{N}_2$.

Cas général

E désigne maintenant un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Q32. Montrer que $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2$.

Soit $u \in \mathcal{N}_2$.

Q33. Justifier que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$ et que $r \leq n - r$.

Q34. Notons (e_1, \dots, e_r) une base de $\text{Im } u$ que l'on complète en une base (e_1, \dots, e_{n-r}) de $\text{Ker } u$. Soient $f_1, \dots, f_r \in E$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u(f_i) = e_i$.
Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$ est une base de E .

Q35. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est de la forme diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0_{n-2r} & & & & \\ & J & (0) & & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & J \end{pmatrix},$$

où 0_{n-2r} désigne la matrice nulle de $M_{n-2r}(\mathbb{K})$ et où les autres blocs diagonaux égaux à J sont en nombre r .

Q36. En déduire que $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$.

Partie III - Un critère d'appartenance à \mathcal{D}

Dans toute cette partie, $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme quelconque.

On souhaite montrer que s'il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples ou doubles, alors $u \in \mathcal{D}$.

Q37. Soient $a, b \in \mathbb{K}$, distincts. On définit :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_1[X]^2 &\longrightarrow \mathbb{K}_3[X] \\ (A, B) &\longmapsto (X-a)^2A + (X-b)^2B \end{aligned}.$$

Montrer que φ est un isomorphisme. En déduire l'existence d'un couple $(A, B) \in \mathbb{K}_1[X]^2$ tel que :

$$(X-a)^2A + (X-b)^2B = 1.$$

Q38. Justifier que pour tous $a, b \in \mathbb{K}$ distincts, $\text{Ker}(u - a \text{Id}_E)^2 \cap \text{Ker}(u - b \text{Id}_E)^2 = \{0\}$.

Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{K}^q$ deux familles de scalaires telles que les $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ sont distincts. On notera que l'une des deux familles $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_q)$ peut éventuellement être vide.

Q39. Justifier que la somme :

$$\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E)$$

est directe.

Q40. Montrer que la somme :

$$\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$$

est directe.

On pourra procéder par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.

Q41. Soit :

$$P = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i) \prod_{j=1}^q (X - \beta_j)^2 \in \mathbb{K}[X]. \quad (2)$$

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, on note P_i, Q_j et R_j les polynômes tels que :

$$P = (X - \alpha_i)P_i, \quad P = (X - \beta_j)Q_j, \quad P = (X - \beta_j)^2 R_j.$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q)$ est libre. En déduire que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$.

On suppose à partir de maintenant que le polynôme P défini en (2) est annulateur de u .

Q42. En décomposant le polynôme constant égal à 1 sur la base \mathcal{B} , justifier que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2.$$

Q43. Conclure que $u \in \mathcal{D}$.

On pourra utiliser le résultat de la question Q36.

FIN