SESSION 2026

TSI1M

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Chaque problème est constitué de parties globalement indépendantes.

PROBLÈME 1

Calcul d'une intégrale via les nombres complexes

Le but de ce problème est de calculer les intégrales du type :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{a-\cos(t)}\,\mathrm{d}t$$

où a désigne un nombre réel tel que $|a|>1$ et n un entier naturel.

Partie I - Lemme préliminaire

Soit a un nombre réel tel que $|a|>1$.

Q1. Justifier qu'il existe deux nombres complexes α et β tels que pour tout nombre complexe z :

$$z^2-2az+1=(z-\alpha)(z-\beta)\,.$$

Q2. Vérifier que $\alpha+\beta=2a$ et $\alpha\beta=1$.

Q3. On suppose dans cette question que $|\alpha|\geq 1$ et $|\beta|\geq 1$. Montrer que $|\alpha|=|\beta|=1$, puis que $|a|\leq 1$.

Q4. En déduire que $|\alpha|<1$ ou $|\beta|<1$.

Q5. On suppose uniquement dans cette question que $a=2$.
Donner la valeur de α et de β pour ce choix de a.

On supposera dans la suite $|\alpha|<1$. On rappelle que a est un nombre réel quelconque tel que $|a|>1$.

Partie II - Calcul d'une intégrale

II.1 - Une première expression en série trigonométrique

Dans cette sous-partie, nous allons établir une première expression en série de $f : t\mapsto \dfrac{1}{a-\cos(t)}$.

Q6. Vérifier que pour tout réel t, $a-\cos(t)\neq 0$.

Q7. Montrer que la fonction $f : t\mapsto \dfrac{1}{a-\cos(t)}$ est continue, paire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

Q8. Rappeler l'expression des coefficients de Fourier de f sous leur forme intégrale.
On ne cherchera pas à les calculer et on utilisera les notations usuelles $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ pour désigner les suites de ces coefficients.

Q9. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cos(nt)\,.$$

II.2 - Une seconde expression en série trigonométrique

Dans cette sous-partie, nous allons établir une seconde expression en série de $f : t \mapsto \dfrac{1}{a - \cos(t)}$.

Q10. Montrer l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{a - \cos(t)} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it})^2 - 2ae^{it} + 1}.$$

Q11. En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{a - \cos(t)} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it} - \alpha)(e^{it} - \beta)},$$

puis que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{a - \cos(t)} = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2}\left(\frac{\alpha e^{-it}}{1 - \alpha e^{-it}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{it}}\right).$$

Q12. Rappeler le rayon de convergence et la somme de la série $\sum\limits_{n \geq 0} z^n$.

Q13. Montrer les égalités :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\alpha e^{-it}}{1 - \alpha e^{-it}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{it}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1} e^{-i(n+1)t} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{int} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \cos(nt).$$

Q14. En déduire l'expression : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \gamma_n \cos(nt)$

avec

$$\gamma_n = \begin{cases} 4\alpha^{n+1}/(1 - \alpha^2) & \text{si } n \geq 1 \\ 2\alpha/(1 - \alpha^2) & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

Q15. Justifier que $\sum\limits_{n \geq 0} \gamma_n$ converge absolument.

II.3 - Conclusion

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - \gamma_n$. On souhaite montrer que les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ coïncident.

Q16. Montrer que pour tout réel t :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cos(nt) = 0.$$

Q17. Le but de cette question est de montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge absolument.

a) Montrer que si une fonction périodique est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors sa fonction dérivée est également périodique de même période sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

c) Par intégrations par parties successives, montrer que pour tout entier naturel n :

$$n^2 \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} f''(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

d) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \qquad |a_n| \leq \frac{1}{n^2 \pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)|\,\mathrm{d}t.$$

e) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$ converge absolument, puis que $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge absolument.

On admet le théorème suivant. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument et telle que, pour tout réel t, on ait $\sum_{n\geq 0} u_n \cos(nt) = 0$. Alors, nécessairement, $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a montré dans les questions précédentes que les hypothèses de ce théorème étaient vérifiées. Ainsi, on a démontré que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 0$.

Q18. En déduire la formule suivante pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{a - \cos(t)}\, \mathrm{d}t = \frac{4\pi\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2}.$$

Q19. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2-\cos(t)}.$$

On pourra s'aider de la question **Q5.**

PROBLÈME 2

Matrices aléatoires

Notations et définitions

Dans ce problème :

- on note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: l'espace vectoriel des matrices carrées réelles sur $\mathbb{R}$ d'ordre 2 ;
- on note $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
- pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A)$, $\mathrm{Tr}(A)$ et $A^\top$ désignent respectivement le déterminant, la trace et la matrice transposée de A ;
- pour tout événement E de l'univers Ω, $P(E)$ désigne la probabilité de E ;
- pour toute variable aléatoire X, $E(X)$ et $V(X)$ désignent respectivement l'espérance et la variance de X ;
- si Π est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors le réel positif $\mathrm{d}(A,\Pi) = \inf_{B\in\Pi} \|A-B\|$ désigne la distance de A à Π.

Soient X_1, X_2, X_3 et X_4 quatre variables aléatoires réelles discrètes sur un univers Ω. Toute matrice de la forme $\Sigma = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ s'appelle une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Plus précisément, pour tout $\omega \in \Omega$, $\Sigma(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ X_3(\omega) & X_4(\omega) \end{pmatrix}$.

Puisque Σ est aléatoire, la probabilité d'un événement relatif à Σ se définit naturellement par :

$$P(\Sigma \in K) = P(\{\omega \in \Omega : \Sigma(\omega) \in K\})$$

où $K \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un ensemble de matrices.

Autrement dit, on mesure la probabilité des réalisations ω pour lesquelles la matrice $\Sigma(\omega)$ satisfait la condition définissant l'ensemble K.

Exemple

On s'intéresse à la probabilité que la matrice aléatoire Σ ne soit pas inversible. L'événement sur l'univers Ω correspondant aux matrices non inversibles est $\{\omega \in \Omega : \Sigma(\omega)$ n'est pas inversible$\}$.

On suppose que :

- X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de $]0,1[$;
- X_3 et X_4 sont deux variables aléatoires certaines avec $X_3(\Omega) = \{2\}$ et $X_4(\Omega) = \{3\}$.

Dans cet exemple, la matrice aléatoire $\Sigma = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ peut prendre comme valeurs les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Parmi celles-ci, la seule matrice non inversible est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à $[X_1 = 0]$ et $[X_2 = 0]$.

La probabilité que la matrice Σ ne soit pas inversible est donc égale à $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = (1-p)^2$.

Les parties de ce problème sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque. Les résultats de la **partie I** sont utiles pour la **partie III**.

Partie I - Généralités sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit le produit $\langle A, B \rangle$ par :

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB^\top).$$

Q20. Soient $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a_i et b_i sont des réels. Vérifier que $\langle A, B \rangle = \sum_{k=1}^{4} a_k b_k$.

Q21. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La norme associée à ce produit scalaire est notée : $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^\top)}$.

Q22. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que la matrice $(A + A^\top)/2$ est symétrique et que la matrice $(A - A^\top)/2$ est antisymétrique. Montrer ensuite que ces deux matrices sont orthogonales pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q23. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est somme, d'une manière unique, d'une matrice symétrique M et d'une matrice antisymétrique N, où $M = (A + A^\top)/2$ et préciser l'expression de N en fonction de A.

Q24. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a l'égalité $\mathrm{d}(A, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|A - A^\top\|$.

Partie II - Matrice de Rademacher

Soient X_1 et Y_1 deux variables aléatoires réelles définies sur un univers Ω telles que :

- X_1 et Y_1 suivent la même loi, appelée loi de Rademacher, définie par :

$$X_1(\Omega) = \{-1; 1\} \quad \text{et} \quad P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}\ ;$$

- X_1 et Y_1 sont indépendantes.

On se propose d'étudier quelques propriétés de la matrice aléatoire $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 1 & Y_1 \end{pmatrix}$.

On définit les deux variables aléatoires discrètes T_1 et Z_1 par :

$$T_1 = \mathrm{Tr}(\Sigma_1) = X_1 + Y_1\,, \quad Z_1 = \det(\Sigma_1) = X_1 Y_1\,.$$

Q25. Déterminer les valeurs de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.

Q26. Déterminer la loi de probabilité de T_1. Calculer $E(T_1)$ et $V(T_1)$.

Q27. Déterminer la loi de probabilité de Z_1. Calculer $E(Z_1)$ et $V(Z_1)$.

Partie III - Matrice géométrique

Soit p un réel dans $]0, 1[$. Dans cette partie, X_2 et Y_2 sont deux variables aléatoires telles que :

- X_2 et Y_2 suivent une loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire :

$$X_2(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad P(X_2 = k) = p(1-p)^{k-1}\ ;$$

- X_2 et Y_2 sont indépendantes.

On introduit la matrice aléatoire Σ_2 définie par $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & X_2 - Y_2 \\ X_2 + Y_2 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus, on définit la variable aléatoire T_2 par :

$$T_2 = \mathrm{d}(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R}))\,.$$

Q28. Rappeler les valeurs de $E(X_2)$ et de $V(X_2)$.

Q29. Étude de $\mathrm{d}(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$.

a) À l'aide de la **partie I**, montrer que $T_2 = Y_2\sqrt{2}$.

b) Calculer $E(T_2)$ et $V(T_2)$.

Q30. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a :

$$P\left(\left|T_2 - \frac{\sqrt{2}}{p}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{2(1-p)}{\delta^2 p^2}\,.$$

Q31. On choisit dans cette question $p = 1/2$.

a) Déterminer un $\delta > 0$ tel que :

$$P\left(\left|T_2 - 2\sqrt{2}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4}\,.$$

b) En déduire qu'avec une probabilité d'au moins $3/4$, on a :

$$\left|d(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) - 2\sqrt{2}\right| < 4\,.$$

Partie IV - Matrice de Poisson

Soient X_3 et Y_3 deux variables aléatoires telles que :

- X_3 et Y_3 suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire :

$$X_3(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_3 = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\ ;$$

- X_3 et Y_3 sont indépendantes.

On se propose d'étudier quelques propriétés de la matrice aléatoire $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} X_3 & 0 \\ 1 & Y_3 \end{pmatrix}$.

Puisque le paramètre λ influence la loi de X_3 et de Y_3, il influence également la loi de Σ_3.
On note alors D_λ l'événement : " la matrice Σ_3 est une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ".
On définit les deux variables aléatoires discrètes T_3 et Z_3 par :

$$T_3 = \mathrm{Tr}(\Sigma_3) = X_3 + Y_3\,, \qquad Z_3 = \det(\Sigma_3) = X_3 Y_3\,.$$

Q32. Rappeler les valeurs de $E(X_3)$ et de $V(X_3)$.

Q33. Inversibilité de Σ_3.

a) Démontrer que $P(Z_3 = 0) = 2\exp(-\lambda) - \exp(-2\lambda)$.

b) En déduire la probabilité que Σ_3 soit inversible.

Q34. Loi de T_3.

a) Montrer que $T_3(\Omega) = \mathbb{N}$, puis que pour tout entier naturel n :

$$P(T_3 = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X_3 = k)P(Y_3 = n-k)\,.$$

b) En déduire que T_3 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Q35. Valeurs propres et vecteurs propres de Σ_3.

a) Vérifier que $\begin{pmatrix} X_3 - Y_3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de Σ_3 et préciser la valeur propre associée.

b) Montrer que Y_3 est une valeur propre de Σ_3 et préciser un vecteur propre associé.

Q36. Diagonalisation de Σ_3.

a) Montrer que $P(X_3 = Y_3) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_3 = k)^2$.

b) Vérifier que Σ_3 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $X_3 \neq Y_3$.

c) Montrer que :

$$P(D_\lambda) = 1 - e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}\,.$$

Q37. Approximation de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-2}}{(k!)^2}$ et de $P(D_1)$.

a) Écrire en `Python` une fonction `Approx_Sum` qui prend pour argument d'entrée un entier naturel N et renvoie $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{e^{-2}}{(k!)^2}$. On pourra utiliser les fonctions `math.factorial()` et `math.exp()`.

b) Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout $x \geq 0$:

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \exp(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

c) En déduire l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et pour tout $x \geq 0$:

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(x)\,.$$

d) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{e}{(n+1)!}\,.$$

e) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \leq \frac{e^{-1}}{(n+1)!}\,.$$

f) On donne $100\,e^{-1} \in [36, 37]$. Déterminer un entier N_0 tel que :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} - \sum_{k=0}^{N_0} \frac{e^{-2}}{(k!)^2} \right| \leq 10^{-2}\,.$$

Avec `Python`, on obtient pour ce N_0 : `print(Approx_Sum(N_0))` $\simeq 0{,}31$.

g) Donner une approximation à 10^{-1} près de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{(k!)^2}$, puis de $P(D_1)$.

h) Dans la question **Q37 a)**, la fonction `Approx_Sum` fait appel à la fonction `math.factorial()`.
Est-il judicieux d'appeler `math.factorial()` dans une boucle `for` ?
On constate que cela ne pose pas de problème avec notre choix N_0, pourquoi ?

Q38. Étude d'une série entière.

a) Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(k!)^2}$.

b) Montrer que $x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k!)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $g : \lambda \mapsto 1 - e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Q39. Démontrer qu'il existe un réel strictement positif μ tel que les variables aléatoires indépendantes X_3 et Y_3 suivent la loi de Poisson de paramètre μ et tel que la matrice

$$\begin{pmatrix} X_3 & 0 \\ 1 & Y_3 \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable avec probabilité $1/2$.

Q40. Proposer une méthode numérique pertinente pour approcher μ. On ne la mettra pas en œuvre.

FIN