Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale, du Préscolaire et des Sports

Académie Hassan II des Sciences et Techniques

Juillet 2024	Sujet de Mathématiques	Durée: 4 h

Le sujet de l'épreuve de mathématiques du concours général des sciences et techniques, session 2024, est composé de deux problèmes largement indépendants à traité dans l'ordre souhaité ; seul le résultat du premier problème est utile à la fin du second.

Pour répondre à une question donnée d'un problème, tout candidat peut admettre et utiliser les résultats des questions qui la précèdent, même s'il ne les a pas traitées, à condition d'indiquer avec précision les références des questions utilisées.

Il est à noter que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de mentionner avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

L'usage de tout document ou matériel électronique est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1
Étude d'une suite numérique et calcul de sa limite

Dans ce problème, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$; l'objet est de montrer qu'elle est convergente, de calculer sa limite ℓ et de déterminer une suite usuelle équivalente à la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}^*}$; c'est à dire une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de réels non nul, telle que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

1ère Partie
Étude de la suite numérique $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $\alpha > 1$

Soit $\alpha > 1$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$.

1.1. Convergence de la suite numérique $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$

1.1.1. Vérifier que la suite $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

1.1.2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$.

1.1.3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\alpha) \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,dt$.

1.1.4. Calculer l'intégrale $\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,dt$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire que la suite $(S_p(\alpha))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

1.1.5. Conclure que la suite numérique $(S_p(\alpha))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Dans la suite, on notera ℓ_α la limite de la suite numérique $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1.2. Recherche d'un équivalent de la suite numérique $(S_n(\alpha) - \ell_\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1.2.1. Justifier que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$.

1.2.2. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$, calculer l'intégrale $\int_n^{n+p} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ puis en déduire que

$$\frac{1}{(\alpha-1)}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+p+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+p)^{\alpha-1}}\right).$$

1.2.3. En déduire que la suite numérique $\left(S_n(n) - \ell_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équivalent à la suite $\left(\frac{-1}{(n-1)n^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2ème Partie
Calcul de la limite de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

On vient de voir que la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équivalent à la suite $\left(\frac{-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où ℓ désigne la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2.1. Si c et d sont deux réels et k un entier naturel non nul, montrer que

$$\int_0^1 (c\,t^2 + d\,t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{(-1)^k(2c+d) - d}{k^2\pi^2}.$$

2.2. En déduire qu'il existe un unique couple (a, b) de réels tels que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\int_0^1 (a\,t^2 + b\,t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{k^2}.$$

2.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (a\,t^2 + b\,t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right)dt$ en fonction de u_n.

2.4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $\theta \in]0, \pi[$, $\displaystyle 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta) = \frac{\sin\left((2n+1)\theta\right)}{\sin\theta}$.

2.5. Un résultat utile

Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur $[0, 1]$.

2.5.1. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt = \frac{f(0) - f(1)\cos(\lambda)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)\,dt$.

2.5.2. En déduire que la fonction $\displaystyle\lambda \longmapsto \int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

2.6. Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$f(t) = \frac{\pi^2(t^2 - 2t)}{4\sin(\frac{\pi}{2}t)} \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = -\pi.$$

2.6.1. Montrer soigneusement que f est continue sur le segment $[0, 1]$.

2.6.2. Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $]0, 1]$ et que sa dérivée f' possède une limite finie à droite en 0, notée L.

2.6.3. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

2.6.4. Déduire de ce qui précède que f est de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$.

2.7. Vérifier que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\displaystyle(a\,t^2 + b\,t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right) = f(t)\sin\left((2n+1)\frac{\pi t}{2}\right)$.

2.8. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel $\frac{\pi^2}{6}$, puis donner un équivalent de la suite $\left(\frac{\pi^2}{6} - u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Problème 2
Étude de quelques fonctions arithmétiques
Applications diverses

Notations, définitions et rappels

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la *partie entière* de x ; c'est l'unique entier relatif k tel que $k \leqslant x < k+1$; le réel $x - \lfloor x \rfloor$ se note $\{x\}$ et s'appelle la *partie factionnaire* de x.

Si $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, avec $k \leqslant n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial défini par : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

— Si a et b sont deux entiers relatifs, on dit que a *divise* b ou que b est *divisible* par a, et on écrit $a \mid b$, s'il existe un entier q tel que $b = aq$. On dit encore que a est un *diviseur* de b ou que b est un *multiple* de a.

— Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, le *plus grand diviseur commun* à a et b est noté $a \wedge b$; le *plus petit multiple commun* à a et b est noté $a \vee b$.
On rappelle que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $na \wedge nb = n(a \wedge b)$ et $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$.

— On appelle *fonction arithmétique*, toute application $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$; l'ensemble des fonctions arithmétiques sera noté $\mathscr{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$.
Une fonction arithmétique f est dite *multiplicative* si pour tout couple (m, n) d'éléments premier entre eux de $\mathbb{N}^*$, on ait $f(mn) = f(m)f(n)$.
Si $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions arithmétiques, on appelle *produit de convolution* de f et g l'application, notée $f * g$ et définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f * g(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right),$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs de n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

1ère Partie
Étude de quelques fonctions arithmétiques

On définit les fonctions arithmétiques suivantes :

— La fonction $\tau : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto \tau(n)$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$; par exemple, $\tau(12) = 6$ puisque les diviseurs de 12 dans $\mathbb{N}^*$ sont $1, 2, 3, 4, 6$ et 12.

— La fonction $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto \sigma(n)$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma(n)$ désigne la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$; par exemple, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.

— La fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto \varphi(n)$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n)$ désigne le nombre des entiers $k \in \{1, \ldots, n\}$ qui sont premiers avec n : $\varphi(n) = \operatorname{card}\{k \in \{1, \ldots, n\} \; ; \; n \wedge k = 1\}$.
Par exemple, $\varphi(12) = 4$ puisque les entiers compris entre 1 et 12 et qui sont premiers avec 12 sont $1, 5, 7$ et 11. Cette fonction est dite la *fonction* φ d'Euler.

1.1. Étude des fonctions τ et σ

On note $m = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel $m \geqslant 2$, où $r \geqslant 1$, $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des entiers naturels non nuls.

1.1.1. Montrer que $\tau(m) = \prod_{k=1}^{r} (\alpha_k + 1)$. Que vaut $\tau(1)$?

1.1.2. Montrer que $\sigma(m) = \prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$. Que vaut $\sigma(1)$?

1.1.3. Montrer que les fonctions τ et σ sont multiplicatives.

1.2. Étude préliminaire de la fonction φ d'Euler

Soit p un nombre premier et soit α un entier naturel non nul.

1.2.1. Calculer $\varphi(p)$ en fonction de p.

1.2.2. Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $k \wedge p^\alpha \neq 1$ si, et seulement si, $p \mid k$.

1.2.3. En déduire l'expression de $\operatorname{card}\{k \in \{1, \ldots, p^\alpha\} \; ; \; p^\alpha \wedge k \neq 1\}$ en fonction de p et α.

1.2.4. Montrer que $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

1.3. Une formule de Gauss

Soit n un entier naturel non nul.

1.3.1. Soit d un diviseur de n dans $\mathbb{N}^*$.

(i) Montrer que si $k \in \{1, \ldots, n\}$, alors $k \wedge n = d$ si et seulement s'il existe $u \in \{1, \ldots, \frac{n}{d}\}$ tel que $k = du$ et $u \wedge \frac{n}{d} = 1$.

(ii) En déduire que $\operatorname{card}\{k \in \{1, \ldots, n\} \; ; \; k \wedge n = d\} = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

1.3.2. Établir que $\{1,\dots,n\} = \bigcup_{d|n} \{k \in \{1,\dots,n\} \ ; \ k \wedge n = d\}$ puis en déduire la formule de Gauss ci-dessous :

$$n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d'|n} \varphi(d'). \tag{1}$$

1.4. Une première application de la formule de Gauss

Soit n un entier naturel non nul.

1.4.1. Montrer que si $d \in \{1,\dots,n\}$, alors le nombre de multiples de d appartenant à $\{1,\dots,n\}$ vaut $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$.

1.4.2. Montrer alors que $\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|k} \varphi(d)$.

1.4.3. En déduire la formule $\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.5. Une conséquence de la formule précédente

On considère un entier naturel $n \geqslant 2$ et on pose $S(n) = \left\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \left\{\frac{n}{k}\right\} \geqslant \frac{1}{2}\right\}$.

1.5.1. Justifier que l'ensemble $S(n)$ est fini.

1.5.2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\lfloor \frac{2n}{k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \in \{0, 1\}$ et que $\lfloor \frac{2n}{k} \rfloor - 2 \lfloor \frac{n}{k} \rfloor = 1$ si, et seulement si, $k \in S(n)$.

1.5.3. Montrer que $\sum_{k \in S(n)} \varphi(k) = n^2$.

2ème Partie
Formule d'inversion de Möbius et applications

En notant $m = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel $m \geqslant 2$, où $r \geqslant 1$, $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des entiers naturels non nuls, on définit la fonction arithmétique dite de Möbius et noté μ par :

$$\mu : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad m \longmapsto \mu(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1, \\ (-1)^r & \text{si } \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 1 \text{ c-à-d } m = \prod_{k=1}^{r} p_k \quad \text{est sans facteur carré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, $\mu(30) = (-1)^3 = -1$ puisque $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $\mu(12) = 0$ puisque $12 = 2^2 \times 3$.

2.1. Montrer que la fonction μ est multiplicative.

2.2. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 2$, $\sum_{d|m} \mu(d) = 0$.

2.3. Étude du produit de convolution de fonctions arithmétiques

On note $\chi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\nu : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions arithmétiques définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \nu(n) = 1 \quad \text{et} \quad \chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \geqslant 2. \end{cases}$$

On rappelle que $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions arithmétiques.

2.3.1. Vérifier que le produit de convolution, noté $*$, est une loi de composition interne sur $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ et montrer qu'elle est commutative et associative.

2.3.2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$; calculer $f * \chi$ en fonction de f et en déduire que la loi $*$ possède un élément neutre à préciser.

2.3.3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$. Montrer que f est inversible pour la loi $*$ si, et seulement si, $f(1) \neq 0$.

2.4. Formule d'inversion de Möbius

Soient $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad g(m) = \sum_{d|m} f(d).$$

2.4.1. Montrer que $\mu * \nu = \chi$. Que peut-on alors dire de ν vis-à-vis de μ ?

2.4.2. Exprimer g en fonction de f et de ν.

2.4.3. En déduire la formule d'inversion de Möbius suivante :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad f(m) = \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) g(d). \tag{2}$$

2.5. Une application à la fonction φ d'Euler

2.5.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$. *On pourra penser à la formule (1).*

2.5.2. Montrer que si $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel $n \geqslant 2$, où $r \geqslant 1$, $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des entiers naturels non nuls, alors

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \tag{3}$$

2.5.3. Montrer que la fonction φ est multiplicative.

2.6. Une application de la fonction φ d'Euler

Pour tout entier naturel n, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$, appelé n-ième nombre de Fermat.

2.6.1. Vérifier que F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des nombres premiers.

2.6.2. Montrer que 641 divise F_5. *On pourra remarquer que $641 = 640 + 1 = 2^7.5 + 1$ et que $641 = 625 + 16$ puis utiliser une congruence.*

2.6.3. Montrer que si n et m sont des entiers naturels distincts, alors $F_n \wedge F_m = 1$.

2.6.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{2^{n+1}} - 1 = F_0 \cdot F_1 \cdots F_n$.

2.6.5. Déterminer tous les entiers naturels non nul n tels que $\varphi(2^{2^n} - 1) = \varphi(2^{2^n})$.

3ème Partie
Étude de la convergence et calcul de limites de certaines suites numériques

3.1. Cas des suites à termes positifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes positifs; on lui associe la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

3.1.1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

3.1.2. En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente si, et seulement si, elle est majorée.

3.2. Cas des suites à termes quelconques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle; on lui associe les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(U'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(U''_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad U'_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k| \quad \text{et} \quad U''_n = \sum_{k=1}^{n} (|u_k| - u_k).$$

3.2.1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant |u_n| - u_n \leqslant 2|u_n|$.

3.2.2. Montrer que si la suite $(U'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, alors il en est de même de la suite $(U''_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.2.3. En déduire que si la suite $(U'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, alors il en est de même de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.3. Produit de convolution de deux suites

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; on note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dite *produit de convolution* des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad w_n=\sum_{d|n}u_d v_{\frac{n}{d}}.$$

On note aussi $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad U_n=\sum_{k=1}^n u_k,\quad V_n=\sum_{k=1}^n v_k\quad \text{et}\quad W_n=\sum_{k=1}^n w_k.$$

On considère enfin les ensembles $\mathcal{C}_n=\{1,\dots,n\}^2$ et $\Delta_n=\{(i,j)\in\mathcal{C}_n\ ;\ ij\leqslant n\}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

3.3.1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_nV_n-W_n=\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathcal{C}_n\setminus\Delta_n}u_iv_j$.

3.3.2. On suppose ici que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont à termes positifs.

(i) Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Delta_n\subset\mathcal{C}_n\subset\Delta_{n^2}$ et en déduire que $W_n\leqslant U_nV_n\leqslant W_{n^2}$.

(ii) Montrer que si les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes, alors il en est de même de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}W_n=\left(\lim_{n\to+\infty}U_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty}V_n\right).$$

3.3.3. On note $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite produit de convolution des suites $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on pose

$$U'_n=\sum_{k=1}^n|u_k|,\quad V'_n=\sum_{k=1}^n|v_k|\quad \text{et}\quad T_n=\sum_{k=1}^n t_k,\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

On suppose de plus que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont telles que les suites $(U'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soient convergentes.

(i) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|U_nV_n-W_n|\leqslant U'_nV'_n-T_n$.

(ii) Montrer que les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}W_n=\left(\lim_{n\to+\infty}U_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty}V_n\right).$$

3.4. Application à l'étude de la suite numérique $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{\mu(k)}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

On considère ici les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $u_n=\frac{\mu(n)}{n^2}$ et $v_n=\frac{1}{n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, où μ est la fonction de Möbius étudiée dans la deuxième partie de ce problème. On note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ leur produit de convolution.

3.4.1. Montrer que $w_1=1$ et que, pour tout $n\geqslant 2$, $w_n=0$.

3.4.2. Montrer que les suites $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{\mu(k)}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

3.4.3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n\frac{\mu(k)}{k^2}=\frac{6}{\pi^2}$.

4ème Partie
Un théorème de Césaro

On rappelle le principe d'inclusion-exclusion admis suivant :
Si r est un entier naturel non nul et $A_1,\ldots,A_r$ sont des ensembles finis, alors

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{k=1}^{r} A_k\Big)=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant r}\operatorname{card}\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big)\right).$$

Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, on pose $\Omega_n=\{(a,b)\ ;\ a,b\in\{1,\ldots,n\}\}=\{1,\ldots,n\}^2$ et on considère l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un couple (a,b), de manière équiprobable, parmi les éléments de l'ensemble Ω_n. Puisque Ω_n est de cardinal n^2, cela revient à considérer l'espace probabilisé $(\Omega_n,\mathscr{P}(\Omega_n),\mathbf{P})$, où la probabilité $\mathbf{P}$ est définie par :

$$\forall\,(a,b)\in\Omega_n,\quad \mathbf{P}(\{(a,b)\})=\frac{1}{n^2}.$$

On note C_n l'événement : « le couple choisi est formé de nombres premiers entre eux » ; c'est-à-dire que $C_n=\{(a,b)\in\{1,\ldots,n\}^2\ ;\ a\wedge b=1\}$.

Le but de cette partie est de calculer la probabilité $\mathbf{P}(C_n)$ de cet événement de deux manières différentes puis de déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}(C_n)$.

4.1. Première méthode de calcul de la probabilité $\mathbf{P}(C_n)$

Soit $n\geqslant 2$; on pose $C_n^+=\Big\{(a,b)\in C_n\ ;\ a<b\Big\}$ et $C_n^-=\Big\{(a,b)\in C_n\ ;\ a>b\Big\}$.

4.1.1. Montrer que $\operatorname{card}(C_n^+)=\operatorname{card}(C_n^-)$ et que $\operatorname{card}(C_n)=1+2\operatorname{card}(C_n^+)$.

4.1.2. Montrer que $\operatorname{card}(C_n^+)=\sum\limits_{k=2}^{n}\varphi(k)$, où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. *On pourra considérer les parties $C_n^+(b)=\{(a,b)\ ;\ 1\leqslant a\leqslant b$ et $a\wedge b=1\}$ pour $b\in\{2,\ldots,n\}$.*

4.1.3. En déduire que $\mathbf{P}(C_n)=\dfrac{1}{n^2}\left(-1+2\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi(k)\right)$.

4.2. Deuxième méthode de calcul de la probabilité $\mathbf{P}(C_n)$

Soit $n\geqslant 2$; on note $q_1,\ldots,q_r$ tous les nombres premiers compris entre 1 et n, avec $q_1<\cdots<q_r$ et $r\geqslant 1$; pour tout $k\in\{1,\ldots,r\}$, on pose :

$$D_k=\Big\{(a,b)\in\Omega_n\ ;\ q_k\mid a \text{ et } q_k\mid b\Big\}.$$

4.2.1. Montrer que $\operatorname{card}(C_n)=n^2-\operatorname{card}\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{r}D_k\Big)$.

4.2.2. Montrer que pour tout $k\in\{1,\ldots,r\}$ et tout k-uplet $(i_1,\ldots,i_k)$ d'éléments de $\{1,\ldots,r\}$ vérifiant $i_1<\cdots<i_k$, on a :

$$\operatorname{card}\Big(\bigcap_{j=1}^{k}D_{i_j}\Big)=\left\lfloor\frac{n}{q_{i_1}\cdots q_{i_k}}\right\rfloor^2.$$

4.2.3. En déduire que $\mathbf{P}(C_n)=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{d=1}^{n}\mu(d)\left\lfloor\dfrac{n}{d}\right\rfloor^2$.

4.3. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2\right),$$

puis retrouver la formule

$$\varphi(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\frac{n}{d}.$$

4.4. Montrer que la suite numérique $(\mathbf{P}(C_n))_{n\geqslant 1}$ est convergente et a la même limite que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\mu(k)}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ puis en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{P}(C_n)=\dfrac{6}{\pi^2}$.

Fin du sujet